Nadja Scharf
Institut für Informatik

Freie Universität Berlin

Einführung in die Spieltheorie

nach

Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani: Algorithmic Game Theory, Kapitel 1

und

Rothe, Baumeister, Lindner, Rothe: Einführung in Computational Social Choice

Gliederung

- Einleitung
- Spiele
  - verschiedene Arten
  - Beispiele
- Konzepte zur Lösung
  - stabile Lösungen
  - Gleichgewichte
  - Aufteilen von Gewinn
- Komplexität
  - Komplexität in Nullsummenspielen mit zwei Spielern
- Märkte
  - Angebot und Nachfrage in Einklang bringen in einem einfachen Marktmodell

Einleitung

- „natürliche“ Spiele
- Spiele zum modellieren von Märkten
- Spieltheorie
  - Eigenschaften
  - Vorhersagen über Spielausgang treffen
    - Gibt es Gleichgewichte?
  - „gute“ Strategien für einzelne Spieler finden
  - faire Aufteilung
  - Komplexität zur Berechnung von Lösungen feststellen



Spiele

simultane Spiele

- alle Spieler machen gleichzeitig einen Zug
- Normalform:
  - $N = \{1, 2, ..., n\}$ Menge der Spieler
  - S_i Menge möglicher Strategien für Spieler i
  - $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$
  - $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, $s \in S$
  - $g_i: S \to \mathbb{R}$ Gewinnfunktion für Spieler i
- für manche Spiele sehr groß, kompaktere Darsellungen existieren

Spiele
simultane Spiele

- Beispiel: Gefangenendilemma

Wesson \ Smith	Gestehen	Schweigen
Gestehen	4 (Smith), 4 (Wesson)	5 (Smith), 1 (Wesson)
Schweigen	1 (Smith), 5 (Wesson)	2 (Smith), 2 (Wesson)

Spiele

sequentielle Spiele

- die Spieler machen ihre Züge nacheinander
- Darstellungen:
  - als simultanes Spiel
    - jede Strategie muss Verhaltensweisen für jeden Spielstatus beinhalten
    - kann sehr groß werden
    - Informationen aus Reihenfolge der Spiele geht evtl. verloren
  - Kompaktdarstellung Thema eines anderen Vortrags
- Beispiele: Schach, Skat, ...

Spiele

kooperative Spiele

- simultane Spiele, bei denen sich die Spieler absprechen können
- kooperative Spiele mit übertragbarem Gewinn:
  - $N = \{1, 2, ..., n\}$ Menge der Spieler
  - $C \subseteq N$ bezeichnet man als Koalition
  - $g: \wp(S) \rightarrow \mathbb{R}^+$ Gewinnfunktion für Koalitionen
  - $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ Gewinnaufteilung mit
    - $x_i \geq 0$ für alle $i \in N$
    - $N = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_m$ Koalitionen, $C_a \cap C_b = \varnothing$ für $a \neq b$
    - $\sum_{i \in C_j} x_i = g(C)$ für alle C_j
- zum Beispiel aktuelle Politik
  - g: jede Koalition, die CDU/CSU enthält und groß genug ist, gewinnt prozentuale Akzeptanz der Bevölkerung als Ansehen, sonst Gewinn 0
  - Gewinnaufteilung entspricht Aufteilung des Ansehens nach umgesetzten Wahlversprechen

Konzepte zur Lösung - simultane Spiele

dominante Strategien

- $s \in S$, $s = (s_i, s_{-i})$: s aufgeteilt in Strategie von Spieler i und restliche Strategien
- s_i ist dominante Strategie für Spieler i, falls für alle Strategievektoren $s' \in S$ gilt:

$$g_i(s_i, s'_{-i}) \geq g_i(s'_i, s'_{-i})$$

- Lösung dominanter Strategien existiert nicht immer

Konzepte zur Lösung - simultane Spiele
dominante Strategien

- Beispiel: Gefangenendilemma

Smith / Wesson	Gestehen	Schweigen
Gestehen	4 (Smith), 4 (Wesson)	5 (Smith), 1 (Wesson)
Schweigen	1 (Smith), 5 (Wesson)	2 (Smith), 2 (Wesson)

Konzepte zur Lösung - simultane Spiele
Pareto-Optimalität

- $s, t \in S$
- globale Sicht
- s Pareto-dominiert t, falls für alle $i \in N$ gilt: $g_i(s) \geq g_i(t)$
  - bei echter Ungleichheit starke Pareto-Dominanz
- s ist Pareto-Optimum, falls für alle t gilt:

  falls t s Pareto-dominiert, so ist $g_i(s) = g_i(t)$ für alle $i \in N$
  - s ist schwach Pareto-optimal, falls es kein t gibt, das s stark Pareto-dominiert
- Pareto-Optimum: kein Spieler kann sich ohne Nachteil für die anderen verbessern
- schwaches Pareto-Optimum: kein anderes s ist für alle Spieler besser

Konzepte zur Lösung - simultane Spiele
Pareto-Optimalität

- Beispiel: Gefangenendilemma

Wesson \ Smith	Gestehen	Schweigen
Gestehen	4 (Smith) / 4 (Wesson)	5 (Smith) / 1 (Wesson)
Schweigen	1 (Smith) / 5 (Wesson)	2 (Smith) / 2 (Wesson)

Konzepte zur Lösung - simultane Spiele
Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien

- verallgemeinert Lösung dominanter Strategien
- $s \in S$ Nash-Gleichgewicht, wenn für alle $i \in N$ und alle $s'_i \in S_i$ gilt:

$$g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(s'_i, s_{-i})$$

- kein Spieler kann durch alleiniges Abweichen der Strategie seinen Gewinn erhöhen
- Vektoren aus dominanten Strategien sind Nash-Gleichgewichte
- Nash-Gleichgewichte liefern nicht immer optimale Lösungen
- Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien existieren nicht immer

Konzepte zur Lösung - simultane Spiele
Nash-Gleichgewichte

- Beispiel: Münzwurfspiel

Anton Bob	Kopf	Zahl
Kopf	-1 1	1 -1
Zahl	1 -1	-1 1

Konzepte zur Lösung - simultane Spiele
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

- p_i: $S_i \rightarrow [0,1]$ Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Spielers über seine Strategien
- $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen aller Spieler
- P_i Menge aller möglichen p_i, $P = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$
- $p \in P$ Nash-Gleichgewicht, wenn für alle $i \in N$ und alle $p'_i \in P_i$ gilt:

$$e_i(p_i, p_{-i}) \geq e_i(p'_i, p_{-i})$$

- e_i erwarteter Gewinn entsprechend der Gewinnfunktion g_i
- Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien
  - existieren immer in Spielen mit endlicher Anzahl von Spielern und endlich vielen Strategien
  - existieren nicht immer bei unendlich vielen Spielern oder Strategien

Konzepte zur Lösung - simultane Spiele

Nash-Gleichgewichte

- Beispiel: Angsthasenspiel

Anton Bob	**Durchfahren**	**Ausweichen**
Durchfahren	-100 -100	0 1
Ausweichen	1 0	0 0

Konzepte zur Lösung - simultane Spiele
korrelierte Gleichgewichte

- $p: S \rightarrow [0,1]$ Wahrscheinlichkeitsverteilung über alle Strategievektoren
- p korreliertes Gleichgewicht, wenn für alle $i \in N$ und alle $s_i, s'_i \in S_i$ gilt:

$$\sum_{s_{-i}} p(s_i, s_{-i})\, g(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i}} p(s_i, s_{-i})\, g(s'_i, s_{-i})$$

- Abweichen von der von p vorgegebenen Strategie führt erwartet zu Gewinnverlust

Konzepte zur Lösung - kooperative Spiele
starkes Nash-Gleichgewicht

- Beispiel: Gefangenendilemma

Smith	Wesson	Walther	Strafe in Jahren
x	x	x	(3, 4, 4)
	x	x	(3, 1, 1)
x		x	(1, 5, 1)
x	x		(1, 1, 5)
x			(4, 2, 2)
	x		(2, 4, 2)
		x	(2, 2, 4)
			(2, 2, 2)

Konzepte zur Lösung - kooperative Spiele
starkes Nash-Gleichgewicht

- mehrere Spieler können geschlossen ihre Strategie wechseln
- $A \subseteq N$
- $s \in S$, $s = (s_A, s_{-A})$: Strategievektor aufgeteilt nach Spielern in A und anderen
- s ist starkes Nash-Gleichgewicht, wenn kein A mit alternativen Strategien s_A existiert, sodass für alle $i \in A$ gilt:

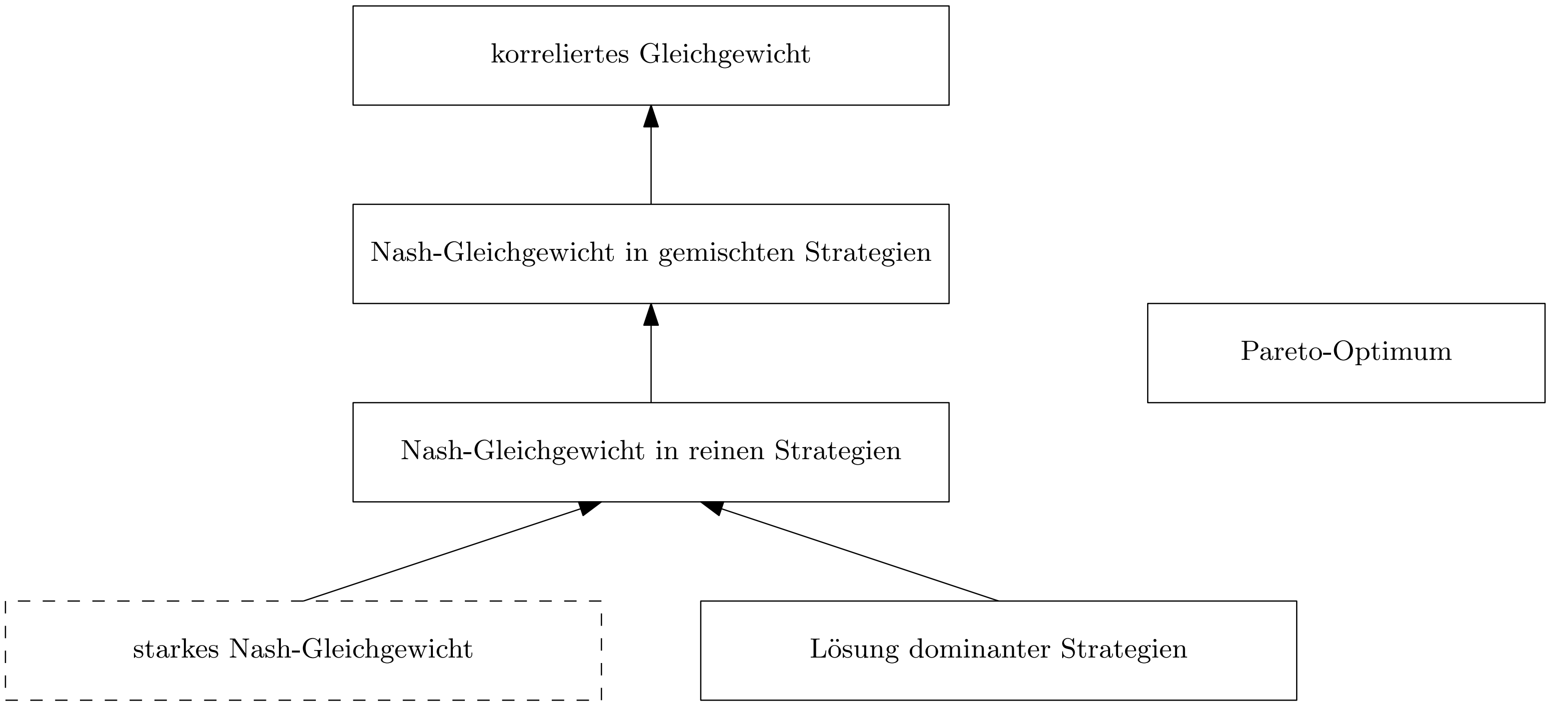
$$g_i(s'_A, s_{-A}) \geq g_i(s_A, s_{-A})$$

und für ein i ist die Ungleichung echt.

- Für keine Gruppe führt Abweichen der Strategien zur Gewinnsteigerung
- viele Spiele besitzen kein starkes Nash-Gleichgewicht

Konzepte zur Lösung

- Zusammenhang



- bisher keine Konzepte zum Erreichen von sozial verträglichen Lösungen behandelt

Konzepte zur Lösung - kooperative Spiele
Kern

- übertragbarer Gewinn

- $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ Gewinnaufteilung bei einer großen Koalition ($N = C_1$)
- x liegt im Kern, falls für alle möglichen Koalitionen $C \subseteq N$ gilt:

$$\sum_{i \in C} x_i \geq g(C)$$

- keine Gruppe Spieler profitiert insgesamt vom bilden einer Koalition

Konzepte zur Lösung - kooperative Spiele

Shapley-Wert

- übertragbarer Gewinn

- $p_1, p_2, \ldots, p_n$ Permutation der Spieler aus N
- $v_{p_j} = g(\{p_1, p_2, \ldots, p_j\}) - g(\{p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}\})$
- Shapley-Wert für Spieler i ist $E[v_i]$ für eine zufällige Permutation

- faires Aufteilen des Gewinns

Komplexität
Nullsummenspiele mit zwei Spielern

- Nullsummenspiele mit zwei Spielern:
  - $g_1(s) = -g_2(s)$
  - zur Darstellung genügt Gewinnmatrix *A* des ersten Spielers
- gesucht: zwei Vektoren *p* und *q*, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen wiedergeben
- $p^T A q$ = erwarteter Gewinn für Spieler 1

- angenommen, Spieler 2 kennt *p*
  - $p^T A$ Zeilenvektor mit erwarteten Gewinnen für jede Strategie von Spieler 2

  ➡ Spieler 2 wählt Strategie mit minimalem erwarteten Gewinn mit Wkt 1

  ➡ Spieler 1 will diesen Wert maximieren

Komplexität
Nullsummenspiele mit zwei Spielern

- lineares Programm zum Bestimmen von p
  - Zielfunktion: $\max v$
  - Nebenbedingungen:

$$p \geq 0$$

$$\sum_i p_i = 1$$

$$(p^T A)_j \geq v \text{ für alle } j$$

- über duales lineares Programm erhält man q
- duale Lineare Programme liefern gleiche Ergebnisse

  ➡ p und q bilden Nash-Gleichgewicht
- lineare Programm in Polynomialzeit lösbar

➡ Nash-Gleichgewicht in Nullsummenspielen mit zwei Spielern in Polynomialzeit

Märkte
einfaches Marktmodell

- Modelle entwickeln, um Vorgänge zu verstehen
- Preisvorhersagen treffen
  - z.B. über Gleichgewichte

- einfaches Modell:
  - Verkäufer V verkaufen dieselbe teilbare Ware, Käufer K
  - $\Gamma(S)$, $S \subseteq V$: Menge aller Käufer, die Verkäufer in S kennen
  - $i \in V$ hat $a_i \in \mathbb{N}$ Einheiten zum Verkauf
  - $j \in K$ hat $m_j \in \mathbb{N}$ viel Geld zur Verfügung
  - $a(S)$: Gesamtmenge der Waren aller Verkäufer in S
  - $m(T)$, $T \subseteq K$: Gesamtmenge Geld aller Käufer in T
- gesucht: Preise für die Waren, sodass Angebot und Nachfrage im Einklang sind

Märkte
einfaches Marktmodell

- ein einheitlicher Preis x ist zulässig, falls für alle $S \subseteq V$ gilt: $x \cdot a(S) \leq m(\Gamma(S))$

- <u>Lemma:</u>

  Ein einheitlicher Preis x ist genau dann zulässig, wenn alle Waren verkauft werden können.
- <u>Beweis:</u>

  (<=) $x \cdot a(S) \geq m(\Gamma(S))$ für ein $S \subseteq V$ => Verkäufer in S können nicht alles verkaufen

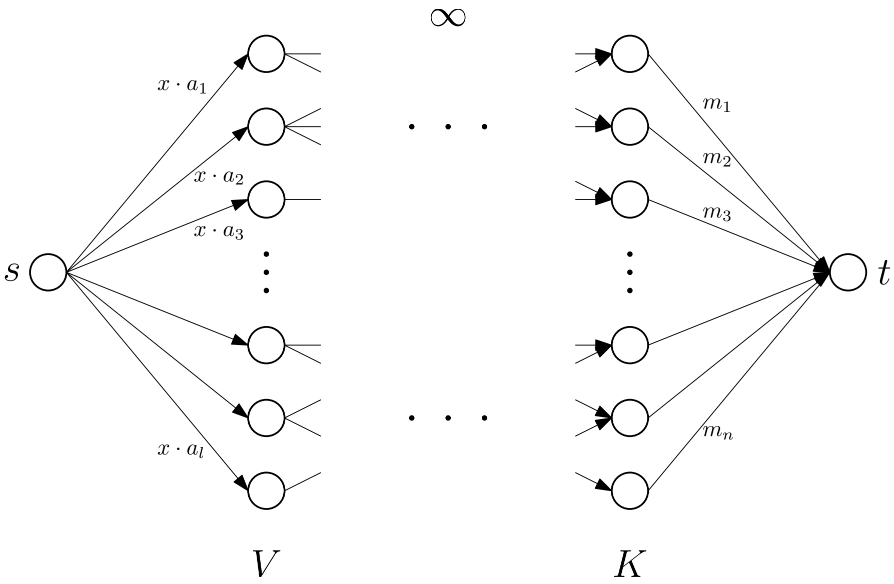
  (=>) Betrachten Flussnetzwerk mit Verkäufern und Käufern als Knoten:
  - von jedem $i \in V$ Kante mit Kapazität ∞ zu jedem $j \in \Gamma(\{i\})$
  - von Quelle s Kante zu jedem $i \in V$ mit Kapazität $x \cdot a_i$
  - von jedem $j \in K$ Kante zu Senke t mit Kapazität m_j

Märkte
einfaches Marktmodell

- <u>Beweis (Fortsetzung):</u>
  - alle Waren verkaufen ~ gültiger Fluss mit Kanten aus *s* saturiert
  - angenommen es existiert kein solcher gültiger Fluss:
    - min-Cut kleiner $x \cdot a(V)$
    - S Verkäufer auf *s* Seite des Schnitts
    - Schnitt hat Kapazität mindestens

      $$x \cdot a(V - S) + m(\Gamma(S)) < x \cdot a(V)$$

    ➡ Widerspruch



Märkte
einfaches Marktmodell

- Algorithmus:
  1. Setze $x = 0$
  2. Falls V nicht leer: erhöhe x solange, bis es ein S gibt mit $x \cdot a(S) = m(\Gamma(S))$ und
  3. entferne S und $\Gamma(S)$ und fahre mit 2. fort.

- zu 2.: gesuchtes x mit Binärsuche bestimmen
  - x kann so weit erhöht werden, dass $(\{s\}, V \cup K \cup \{t\})$ gerade noch min-Cut ist
  - x hat polynomielle Größe, da $m(\Gamma(S))$ und $a(S)$ polynomielle Größe haben
- zu 3.: berechnen max-Flow, über saturierte Kanten erhält man S und $\Gamma(S)$
  - x zulässig für Restgraphen
  - restliche Knoten haben Grad > 0

Märkte

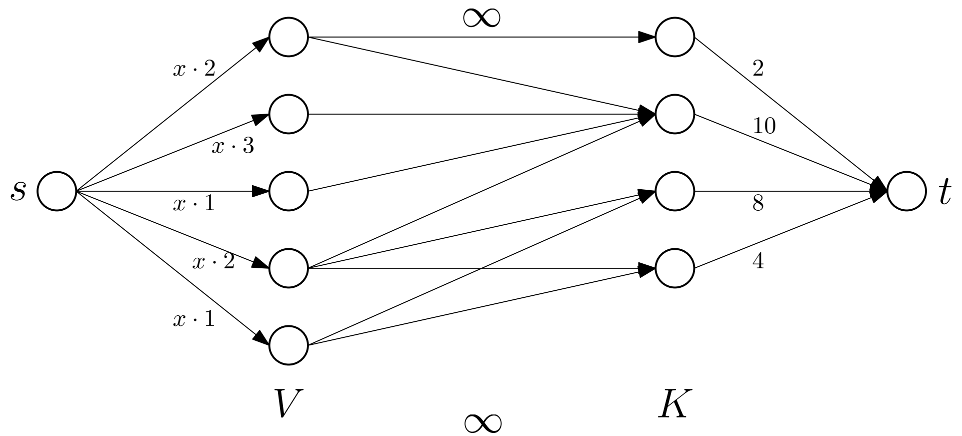
einfaches Marktmodell

- Analyse und Korrektheit:
  - Algorithmus läuft in Polynomialzeit:
    - höchstens $|V|$ Iterationen
    - eine Iteration in Polynomialzeit
  - Algorithmus ist korrekt:
    - terminiert
    - Verkäufer kann nicht teurer verkaufen (Lemma).
    - Käufer können für ihr Geld nicht mehr bekommen, da in späteren Iterationen der Preis höher ist.

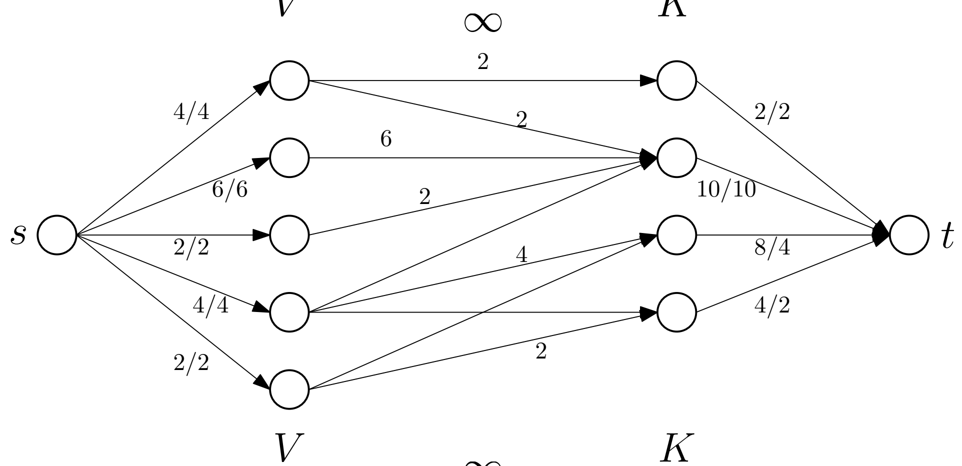
Märkte

einfaches Marktmodell

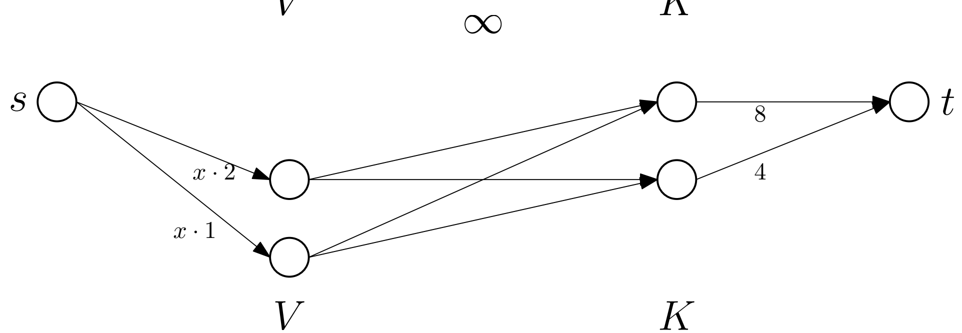
- Beispiel:



x = 2, max-Flow



verbleibender Graph



Danke für die Aufmerksamkeit

Gibt es Fragen?