

Die Komplexitätsklasse PPAD

Oliver Wiese

Wolfgang Mulzer, Yannik Stein

1 Die Komplexität von NASH

Definition 1. Das Problem zu einem gegebenen Spiel in Normalform ein Nash Gleichgewicht zu finden heißt **NASH**.

Definition 2. Ein 2-Spieler Spiel mit der Gewinnmatrix A für Spieler 1 und Gewinnmatrix B für Spieler 2 heißt **symmetrisch**, wenn $A = B^T$ gilt.

In diesem Fall wird nur die Matrix A angegeben.

1.1 Problem der Eingabe- und Ausgabegröße

Die naive Eingabe- und Ausgabe für Nash Gleichgewicht ist problematisch. Denn wenn das Spiel durch einfache Auflistung der Gewinne der Kombinationen aus allen Spielern (n) und Strategien (s) repräsentiert wird, dann kann die Eingabegröße $n \cdot s^n$ betragen. Bei einer solchen Eingabegröße kann das Probieren aller Lösungsmöglichkeiten bereits effizient sein. Eine komplexitätstheoretische Betrachtung ist somit uninteressant. Eine Möglichkeit ist die Betrachtung von Zwei-Spieler Spielen, wobei die Eingabegröße nur $2n \cdot m$ ist, wobei n und m jeweils die Anzahl der Strategien sind. Für mehrere Spieler sind Einschränkungen notwendig. Ein Spiel kann als Graph dargestellt werden. Die Knoten repräsentieren die Spieler und sind im Grad beschränkt. Eine Kante zwischen zwei Spielern besteht, wenn die Strategien voneinander abhängen. (Weitere Informationen siehe Vortrag 6). Weitere Beispiele sind symmetrische Spiele, in denen alle Spieler identisch sind, oder anonyme Spiele, in denen Spieler nicht unterscheidbar sind.

Wenn mehr als zwei Spieler an einem Spiel teilnehmen, kann das Nash Gleichgewicht aus reellen Zahlen bestehen. Die Ausgabe wäre dann nicht exakt.

1.2 Versuch der Einordnung in bekannte Komplexitätsklassen

Bei bekannten Komplexitätsklassen (P, NP) ist, dass Problem ein Entscheidungsproblem, bei dem die Antwort Ja oder Nein ist. Bei NASH hingegen wird eine Lösung gesucht und es ist bekannt, dass eine Lösung existiert. Eine Einordnung ist nicht einfach möglich.

Satz 3. Wenn es gibt eine Funktion f von Schaltkreis zu Spielen mit ϕ erfüllbar gdw. jedes Nash Gleichgewicht von $f(\phi)$ eine Eigenschaft Π besitzt, dann gilt $NP = coNP$.

Aber es wird vermutet, dass $NP \neq coNP$ gilt. Also sind vermutlich NP-vollständige Probleme „schwerer“ als NASH. Es ist aber kein effizienter Algorithmus bekannt um allgemein eine Lösung für NASH zu finden. Also muss eine neue passende Komplexitätsklasse gefunden werden.

Allerdings können aus NASH NP-vollständige Probleme formuliert werden. Der Beweis für folgende Beispiele kann in [1] nachgelesen werden.

Satz 4. Für jedes symmetrisches Spiel mit zwei Spielern sind folgende Probleme NP-vollständig:

- Gibt es mindestens zwei Nash Gleichgewichte?
- Gibt es ein Nash Gleichgewicht, welches eine bestimmte Strategie unterstützt.
- Ein Nash Gleichgewicht in dem Spieler 1 mindestens einen Gewinn von Betrag x hat?
- usw.

2 Lemke-Howson Algorithmus

Mit dem Lemke-Howson Algorithmus kann ein Nash Gleichgewicht gefunden werden. Dieser Algorithmus wird nächste Woche genauer erklärt. Es ist ein alternativer Beweis für Nash's Theorem.

Definition 5. Das Problem für ein gegebenes symmetrisches Spiel ein symmetrisches Nash Gleichgewicht zu finden heißt **sNASH** (symmetric NASH).

Satz 6. NASH kann in polynomieller Zeit auf sNASH reduziert werden.

Es genügt also zunächst einen Algorithmus für den symmetrischen Fall zu betrachten. Es ist aber wichtig, dass in diesem Fall auch ein symmetrisches Nash Gleichgewicht gesucht wird. Sei A eine $n \times n$ Gewinnmatrix für ein symmetrisches Zwei-Spieler Spiel mit $a_{i,j} \geq 0$ und jede Spalte ist nicht komplett Null und betrachte das nicht-degenerierte konvexe Polytop P aus $2n$ Ungleichung $Az \leq 1, z \geq 0$.

Definition 7. Strategie i ist in Knoten z repräsentiert, wenn $z_i = 0$ oder $A_i z = 1$ in diesem Knoten gilt.

Das bedeutet, dass eine oder zwei Ungleichungen des Polytops für Strategie i gleich z sind.

Satz 8. Sei z ein Knoten in dem alle Strategien vertreten sind und alle ungleich Null sind und sei der Vektor x mit $x_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^n z_j}$. Dann ist x ein symmetrisches Nash Gleichgewicht.

Der Ansatz vom Algorithmus ähnelt dem Simplex-Verfahren und versucht schrittweise Ungleichungen zu relaxen. Das Ziel ist es die Anzahl der Strategien in dem betrachteten Knoten zu erhöhen.

1. $v_0 = 0$
2. Wähle Strategie i und passe entsprechende Ungleichung an.
3. Wähle Nachbarknoten v_1 von v_0 , so dass $z_i \neq 0$
4. Wähle Strategie j mit kommt zweimal ($z_j = 0$ und $A_j z = 1$) vor
(j ex., da i in v_1 nicht vorkommt, aber n Strategien in einem Knoten vertreten sind)
5. Passe eine Ungleichung von $z_j = 0$ oder $A_j z = 1$ an, so dass entsprechende Knoten $v_2 \neq v_0$
Eine der beiden Ungleichungen ist abhängig von v_0 (von dort kommen wir) der andere Knoten ist aber neu.
6. Wenn in v_2 alle Strategien vertreten sind, dann haben wir ein Nash Gleichgewicht gefunden.
Ansonsten $v_0 = v_1, v_1 = v_2$ und wiederhole ab Zeile 4.

Der Algorithmus terminiert, da jeder Knoten nur einmal betrachtet wird und P endlich ist.

3 Von Nash zu Problemen aus PPAD

Aus dem vorherigen Abschnitt kann ein Graph G mit folgenden Eigenschaften konstruiert werden:

- G ist endlich und gerichtet, aber kann exponentiell viele Knoten haben.
- Jeder Knoten hat je höchstens einen In- und Außengrad von Eins.
- Es gibt eine bekannte Quelle (oben Nullknoten) genannt „Standard Quelle“.
- Jede Quelle und Senke, ohne die Standard Quelle, ist eine Lösung.
- Für eine Eingabe können folgende Probleme effizient gelöst werden:
 1. Eingabe ist ein Knoten vom Graphen und
 2. Die Bestimmung vom Vorgänger und Nachfolger.

Außerdem wird eine Senke oder eine nicht-Standard Quelle gesucht. Probleme dieser Art werden in der Komplexitätsklasse PPAD gebündelt. Es gibt etliche Probleme davon, wie zum Beispiel Brouwer Fixpunkt. Für keines dieser Probleme ist ein effizienter Algorithmus bekannt.

Probleme aus NP sind „schwerer“ lösbar als Probleme aus PPAD(=Polynomial Parity Arguments on Directed graphs). Es ist nicht bekannt, ob Probleme aus PPAD effizient lösbar sind. Aber falls $NP = P$ gilt, so sind Probleme aus PPAD auch effizient lösbar. Die Implikation gilt aber nicht in die andere Richtung! Es ist also sinnvoll PPAD-Vollständigkeit analog zur NP-Vollständigkeit einzuführen.

4 PPAD-vollständiges Problem Brouwer

Es wird ein vereinfachteres Problem von Brouwers Fixpunkt vorgestellt. Dabei wird der Einheitswürfel im 3D-Raum in 2^{3n} gleiche cubelets mit Seiten $\epsilon = 2^{-n}$ geteilt. Sei x ein Mittelpunkt eines cubelet, dann soll der Funktion $\phi(x)$ zu einem nächsten Mittelpunkt abbilden. Der Wertebereich der Funktion ist $x + \delta_i$ für $i = 0, \dots, 3$ mit $\delta_0 = (-\epsilon, -\epsilon, -\epsilon)$, $\delta_1 = (\epsilon, 0, 0)$, $\delta_2 = (0, \epsilon, 0)$ und $\delta_3 = (0, 0, \epsilon)$.

Definition 9. Ein Punkt heißt Fixpunkt, wenn dieser ein innerer Eckpunkt eines cubelet ist und in allen acht adjazenten cubelets alle vier Abweichungen von $\delta_i (i = 0, \dots, 3)$ vorkommen.

ϕ wird als ein Schaltkreis aus AND-, OR-, NOT-Gattern konstruiert. Die Eingabe sind $3n$ Bits und die Ausgabe ist zwei Bits lang. Das Startproblem für PPAD-vollständigkeit ist ein gegebener Schaltkreis für ϕ und gesucht ist ein Fixpunkt von ϕ .

5 Reduktion von Brouwer auf Nash Gleichgewicht

Ziel ist es zu nächst Brouwer auf ein Graphenspiel mit mehreren Spielern zu reduzieren. Dazu haben alle Spieler nur zwei Strategien (0 oder 1). Drei Spieler wählen die Koordinaten für einen Punkt im Würfel. Die restlichen Spieler berechnen den entsprechenden cubelet und berechnen δ_i für die entsprechenden cubelets. Wenn der gewählte Punkt kein Fixpunkt ist, dann wechseln die drei Spieler ihre Strategie und ansonsten nicht.

Um diesen Ansatz umzusetzen müssen logische und arithmetische Operationen ausgeführt werden. Diese müssen als graphische Spiele simuliert werden. Die Eingabe und Ausgabe sind dabei wieder spezielle Spieler.

6 Fakten und Schlussfolgerung

Der gerichtete Graph eines Spiels ist bipartit und jeder Knoten hat einen Ingrad von drei oder weniger. Es wurde zunächst gezeigt, dass vier Spieler ausreichen. Die Idee ist, dass jeder Knoten nicht durch einen eigenen Spieler dargestellt wird. Um dies zu realisieren wird ein Konfliktgraph eingeführt. In diesem Konfliktgraphen besteht eine Kante zwischen zwei Knoten u und v , wenn im Spielgraphen eine Kante zwischen u und v besteht oder beide Kanten von u und v zu einem gemeinsamen Knoten w verlaufen. Es wurde dann festgestellt, dass der Konfliktgraph 4-färbbar ist. Es wurde zu nächst vermutet, dass 3-Spieler-Spiele PPAD-vollständig sind, aber 2-Spieler Spiele effizient lösbar sind. Später wurde aber gezeigt, dass 2-Spieler Spiele auch PPAD-vollständig sind. In einem 2-Spieler Spiel kann eine $\frac{1}{2}$ -Approximation von einem Nash Gleichgewicht in linearer Zeit berechnet werden [2]. Eine ϵ -Approximation kann für ein beliebiges Spiel in Zeit $\mathcal{O}(n^{\frac{\log n}{\epsilon^2}})$ gefunden werden. Das ist keine exponentielle Laufzeit, sondern quasi-polynomiell. Eine wichtige Erkenntnis ist, dass für einen effizienten Algorithmus zur Findung eines Nash Gleichgewicht in einem speziellen Spiel die besonderen Eigenschaften des Spiels von Bedeutung sind und diese vorteilhaft genutzt werden müssen. Denn eine allgemeine Lösung um ein Nash Gleichgewicht in effizienter Zeit zu lösen wird man wahrscheinlich nicht finden. Es ist daher sinnvoll einfache Spieleklassen zu betrachten.

Literatur

- [1] Vincent Conitzer and Tüomas Sandholm. Complexity results about nash equilibria. In *Proceedings of the 18th international joint conference on Artificial intelligence*, IJCAI'03, pages 765–771, San Francisco, CA, USA, 2003. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- [2] Constantinos Daskalakis, Aranyak Mehta, and Christos Papadimitriou. A note on approximate nash equilibria. *Theor. Comput. Sci.*, 410(17):1581–1588, April 2009.
- [3] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, and Vijay V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007.