Freie Universität Berlin

Die Komplexitätsklasse PPAD

Oliver Wiese
Freie Universität Berlin

Seminar über Algorithmen ,WS 2013/14

Outline

Wiederholung

Definition

Sei $N = \{1, 2, \dots, n\}$ die Menge der Spieler. Für jeden Spieler i sei S_i eine Menge möglicher Strategien oder Aktionen. Wählt jeder Spieler eine Strategie, so ergibt sich ein Strategievektor $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ mit $s \in S = \times_{j=1}^{n} S_i$. Dann lässt sich der Gewinn für jeden Spielers i für jedes mögliche s durch Funktionen $g_i : S \to \mathbb{R}$ angeben. Diese Darstellungsform heißt **Normalform**.

Wiederholung

Definition

Sei $N = \{1, 2, \dots, n\}$ die Menge der Spieler. Für jeden Spieler i sei S_i eine Menge möglicher Strategien oder Aktionen. Wählt jeder Spieler eine Strategie, so ergibt sich ein Strategievektor $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ mit $s \in S = \times_{j=1}^{n} S_i$. Dann lässt sich der Gewinn für jeden Spielers i für jedes mögliche s durch Funktionen $g_i : S \to \mathbb{R}$ angeben. Diese Darstellungsform heißt **Normalform**.

Definition

Sei S_i die Menge der Strategien für Spieler i und Π_i eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darauf. Sei $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n)$. Dann ist Π ein **Nash–Gleichgewicht in gemischten Strategien**, wenn für alle alle $i \in N$ und alle anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen Π_i' gilt

$$g_i'(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_i, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_n) \geq g_i'(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_i', \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_n),$$

wobei g_i' den erwarteten Gewinn basierend auf g_i wiedergibt.

Beispiel: Angsthasen

Bob \ Anton	Durchfahren	Ausweichen
Durchfahren	-100 (Anton), -100 (Bob)	0 (Anton), 1 (Bob)
Ausweichen	1 (Anton), 0 (Bob)	0 (Anton), 0 (Bob)

Beobachtung

Eine gemischtes Strategie Profil ist ein Nash Gleichgewicht , wenn die gemischte Strategie von jedem Spieler eine beste Antwort auf den Rest ist.

Satz

Eine gemischte Strategie ist die beste Antwort, gdw. alle untersützen reinen Strategien beste Antworten sind.

Beweis

Durch Widerspruch:

- *Annahme: Eine beste Antwort gemischte Strategie unterstützt eine reine Strategie s, die keine keine beste Antwort ist.*
- *erwarter Gewinn vom Spieler erhöhen durch Verringerung der Wahrscheinlichkeit von s*
- *Widerspruch. gemischte Strategie war keine beste Antwort*

Erkenntnis aus der letzten Woche

- Für jedes endliches Spiel gibt es ein gemischtes Nash Gleichgewicht
- Heutige Fragen:
  - Wie schwer ist es ein Nash Gleichgewicht zu finden?
  - Wo lässt sich es in der Welt der Komplexitätsklassen einordnen?
  - Was sind die Unterschiede zu anderen bekannten Problemklassen?
  - Gibt es ähnliche Probleme?

Formalisierung des Problems

Definition

*Das Problem zu einen gegeben 2-Spieler Spiel in Normalform ein gemischtes Nash Gleichgewicht zu finden heißt **NASH**.*

Ein- und Ausgabe

- Ausgabe bei mehr als 2 Spieler kann aus reellen Zahlen bestehen
- Auflistung aller Kombinationen aus Spieler(n) und Strategien(s) $\rightarrow$ Eingabegröße: $n \cdot s^n$
- Für mehrere Spieler sind knappere Darstellungen notwendig.
- Der Gewinn von einem Spieler ist abhängig von den Aktionen weniger Spieler.

Graphenspiele

Sei $G = (1, \ldots, n, E)$ ein gerichter Graph und die Knoten die Spieler. $(i, j) \in E$ gdw. Gewinn von j abhängig von der Strategie von i ist.

- Sei der Ingrad höchstes d und s Strategien $\rightarrow$ Eingabegröße nur $n \cdot s^{d+1}$

weitere Spielarten

- Dünnbesetzte Spiele
- Symmetrische Spiele
- Anonyme Spiele
- usw.

Wiederholung NP und coNP

Definition

$L \in NP$ gdw. es existiert eine TM M mit $x \in L \Leftrightarrow \exists y : M$ hält in akz. Zustand bei Eingabe x, y (x, y sind poly. lang)

Wiederholung NP und coNP

Definition

$L \in NP$ gdw. es existiert eine TM M mit $x \in L \Leftrightarrow \exists y : M$ hält in akz. Zustand bei Eingabe x, y (x, y sind poly. lang)

Definition

$L \in coNP$ gdw. es existiert eine TM M mit $x \in L \Leftrightarrow \forall y : M$ hält in akz. Zustand bei Eingabe x, y (x, y sind poly. lang)

NASH im Vergleich zu NP

- Bei NASH gibt es eine Lösung und die Lösung ist gesucht.
- Bei bekannten NP-vollständigen Problemen, z.B. SAT, ist die Frage, ob es überhaupt eine Lösung gibt.

NASH im Vergleich zu NP

- Bei NASH gibt es eine Lösung und die Lösung ist gesucht.
- Bei bekannten NP-vollständigen Problemen, z.B. SAT, ist die Frage, ob es überhaupt eine Lösung gibt.

Satz

Wenn es eine Funktion f von Schaltkreis zu Spielen mit ϕ erfüllbar gdw. jedes Nash Gleichgewicht von $f(\phi)$ eine Eigenschaft Π besitzt gibt, dann gilt $NP = coNP$.

abgeleitete NP-vollständige Probleme aus NASH

Satz

Für jedes symmetrisches Spiel mit zwei Spielern sind folgende Probleme NP-vollständig:

- *Gibt es mindestens zwei Nash Gleichgewichte?*
- *Gibt es ein Nash Gleichgewicht, welches eine bestimmte Strategie unterstützt?*
- *Gibt es ein Nash Gleichgewicht in dem Spieler 1 mindestens einen Gewinn von x hat?*

Vereinfachung des Problems

Definition

Ein 2-Spieler Spiel mit der Gewinnmatrix A für Spieler 1 und Gewinnmatrix B für Spieler 2 heißt ***symmetrisch****, wenn* $A = B^T$ *gilt.*

Vereinfachung des Problems

Definition

Ein 2-Spieler Spiel mit der Gewinnmatrix A für Spieler 1 und Gewinnmatrix B für Spieler 2 heißt ***symmetrisch****, wenn* $A = B^T$ *gilt.*

Definition

Das Problem für ein gegebenes symmetrisches Spiel ein symmetrisches Nash Gleichgewicht zu finden heißt ***sNASH*** *(symmetric Nash).*

Vereinfachung des Problems

Definition

Ein 2-Spieler Spiel mit der Gewinnmatrix A für Spieler 1 und Gewinnmatrix B für Spieler 2 heißt ***symmetrisch****, wenn $A = B^T$ gilt.*

Definition

Das Problem für ein gegebenes symmetrisches Spiel ein symmetrisches Nash Gleichgewicht zu finden heißt ***sNASH*** *(symmetric Nash).*

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- *gemischte Strategie* $p = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

Vereinfachung des Problems

Satz

NASH kann in polynomieller Zeit auf den sNASH reduziert werden.

Beweis

- *Vereinfachung für 2-Spieler mit Matrizen A und B und* $a_{i,j} > 0, b_{i,j} > 0$
- *Betrachte symmetrisches Spiel mit* $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ *und* (x, y) *ein symmetrisches Gleichgewicht.*
- (x, y) *beste Antwort auf sich selber.* x *ist eine beste Antwort auf* y *und umgekehrt*
- $\rightarrow x, y$ *bilden ein Nash Gleichgewicht im ursprünglichen Spiel*

Keine Aussage über nicht-symmetrische Nash Gleichgewichte!

Ein symmetrisches Spiel als Graph

- Sei A die $n \times n$ Gewinnmatrix für ein symmetrisches 2-Spieler Spiel mit den Eigenschaften:
  1. $a_{i,j} \geq 0$
  2. $A_i \neq 0$

Ein symmetrisches Spiel als Graph

- Sei A die $n \times n$ Gewinnmatrix für ein symmetrisches 2-Spieler Spiel mit den Eigenschaften:
  1. $a_{i,j} \geq 0$
  2. $A_i \neq 0$
- Annahme: P konvexes nicht-degeneriertes Polygon durch die $2n$ Ungleichungen $Az \leq 1, z \geq 0$
- P nicht-degeneriert → jeder Knoten wird von genau n Bedingungen geschnitten.
- P ist nicht leer und beschränkt

Definitionen über die Knoten

Definition

Strategie i ist in Knoten z vertreten, wenn $z_i = 0$ *oder* $A_i z = 1$ *in diesem Knoten gilt.*

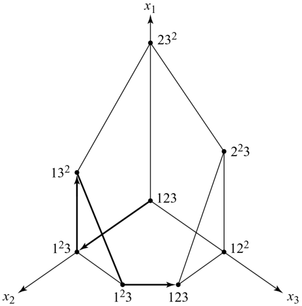
- Also sind eine oder zwei Ungleichungen des Polytops für Strategie i sind in Knoten z erfüllt.
- Vertretene Strategien als Knotenbezeichnung

Freie Universität Berlin

Definition

Strategie i ist in Knoten z vertreten, wenn $z_i = 0$ oder $A_i z = 1$ in diesem Knoten gilt.

- Also sind eine oder zwei Ungleichungen des Polytops für Strategie i sind in Knoten z erfüllt.
- Vertretene Strategien als Knotenbezeichnung



Satz

Sei z ein Knoten in dem alle Strategien vertreten sind, $z \neq 0$ und der Vektor x mit $x_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^{n} z_j}$. Dann ist x ein symmetrisches Nash Gleichgewicht .

Beweis

- $\forall x_i : A_i z = 1, 0 \leq x_i \leq 1 \Rightarrow x$ *erfüllt die beste Antwort Bedingung*
- x *ist ein Nash Gleichgewicht*

Was ist ein symmetrisches Nash Gleichgewicht ?

Satz

Sei z ein Knoten in dem alle Strategien vertreten sind, $z \neq 0$ und der Vektor x mit $x_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^{n} z_j}$. Dann ist x ein symmetrisches Nash Gleichgewicht .

Beweis

- $\forall x_i : A_i z = 1, 0 \leq x_i \leq 1 \Rightarrow x$ *erfüllt die beste Antwort Bedingung*
- *x ist ein Nash Gleichgewicht*

- Gesucht: Knoten z in dem alle Strategien vertreten sind und $z \neq 0$
- Wir kennen: Knoten $v_0 = (0, \ldots, 0)$
- Finde Pfad von v_0 nach z

Lemke-Howson Algorithmus

1. $v_0 = 0$
2. Wähle Strategie i und passe entsprechende Ungleichung an.
3. Wähle Nachbarknoten v_1 von v_0, so dass $z_i \neq 0$

Lemke-Howson Algorithmus

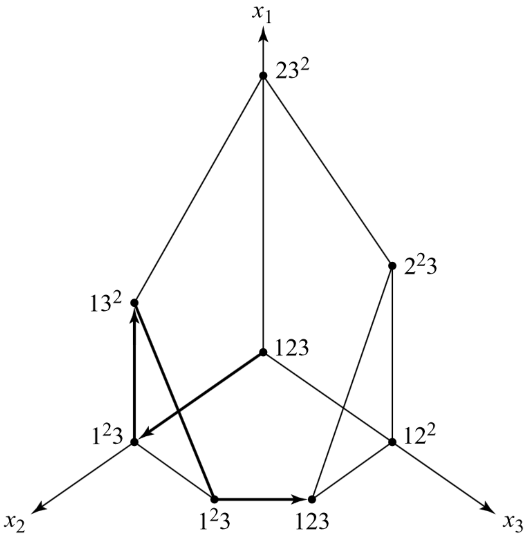
1. $v_0 = 0$
2. Wähle Strategie i und passe entsprechende Ungleichung an.
3. Wähle Nachbarknoten v_1 von v_0, so dass $z_i \neq 0$
4. Wähle Strategie j mit kommt zweimal ($z_j = 0$ und $A_j z = 1$) vor

1. $v_0 = 0$
2. Wähle Strategie i und passe entsprechende Ungleichung an.
3. Wähle Nachbarknoten v_1 von v_0, so dass $z_i \neq 0$
4. Wähle Strategie j mit kommt zweimal ($z_j = 0$ und $A_j z = 1$) vor
5. Passe eine Ungleichung von $z_j = 0$ oder $A_j z = 1$ an, so dass entsprechende Knoten $v_2 \neq v_0$
   Eine der beiden Ungleichungen ist abhängig von v_0 (von dort kommen wir) der andere Knoten ist aber neu.

Lemke-Howson Algorithmus

1. $v_0 = 0$
2. Wähle Strategie i und passe entsprechende Ungleichung an.
3. Wähle Nachbarknoten v_1 von v_0, so dass $z_i \neq 0$
4. Wähle Strategie j mit kommt zweimal ($z_j = 0$ und $A_j z = 1$) vor
5. Passe eine Ungleichung von $z_j = 0$ oder $A_j z = 1$ an, so dass entsprechende Knoten $v_2 \neq v_0$
   Eine der beiden Ungleichungen ist abhängig von v_0 (von dort kommen wir) der andere Knoten ist aber neu.
6. Wenn in v_2 alle Strategien vertreten sind, dann haben wir ein Nash Gleichgewicht gefunden.
   Ansonsten $v_0 = v_1, v_1 = v_2$ und wiederhole ab Zeile 4.

Beispiel



Problem: Terminierbarkeit

Beobachtung

Ein innerer Knoten kann nicht öfter besucht werden.

Korrektheit und Laufzeit

Problem: Terminierbarkeit

Beobachtung

Ein innerer Knoten kann nicht öfter besucht werden.

Denn das würde bedeuten, dass bei Anpassung einer Bedingung drei Knoten erreichbar wären.

Beobachtung

Ein Startknoten kann nicht öfter besucht werden.

Denn die Anfangsstrategie wird nur beim letzten Knoten wieder gewählt, wenn alle Strategien im Knoten vertreten sind.

Problem: Terminierbarkeit

Beobachtung

Ein innerer Knoten kann nicht öfter besucht werden.

Denn das würde bedeuten, dass bei Anpassung einer Bedingung drei Knoten erreichbar wären.

Beobachtung

Ein Startknoten kann nicht öfter besucht werden.

Denn die Anfangsstrategie wird nur beim letzten Knoten wieder gewählt, wenn alle Strategien im Knoten vertreten sind.

Folgerung

Der Algorithmus terminiert, aber die Laufzeit ist exponentiell.

Von NASH zu Problemen aus PPAD

PPAD = Polynomial Parity Arguments on Directed graphs
Verallgemeinerung des Graphen:

Von NASH zu Problemen aus PPAD

PPAD = Polynomial Parity Arguments on Directed graphs
Verallgemeinerung des Graphen:

- G ist endlich und gerichtet, aber kann exponentiell viele Knoten haben.
- Jeder Knoten hat je höchstens einen In- und Außengrad von Eins.
- Es gibt eine bekannte Quelle (oben Nullknoten) genannt „Standard Quelle”.
- Jede Quelle und Senke, ohne die Standard Quelle, ist eine Lösung.
- Für eine Eingabe können folgende Probleme effizient gelöst werden:
    1. Eingabe ist ein Knoten vom Graphen,
    2. Die Bestimmung vom Vorgänger und Nachfolger.

Von NASH zu Problemen aus PPAD

PPAD = Polynomial Parity Arguments on Directed graphs
Verallgemeinerung des Graphen:

- G ist endlich und gerichtet, aber kann exponentiell viele Knoten haben.
- Jeder Knoten hat je höchstens einen In- und Außengrad von Eins.
- Es gibt eine bekannte Quelle (oben Nullknoten) genannt „Standard Quelle".
- Jede Quelle und Senke, ohne die Standard Quelle, ist eine Lösung.
- Für eine Eingabe können folgende Probleme effizient gelöst werden:
  1. Eingabe ist ein Knoten vom Graphen,
  2. Die Bestimmung vom Vorgänger und Nachfolger.

Das Problem ist dann die Suche nach einer Senke oder nicht-Standard Quelle.
Eine effiziente Lösung ist nicht bekannt.

Einordnung von PPAD

- Falls NP$=$ P $\Rightarrow$ PPAD effizient lösbar

Einordnung von PPAD

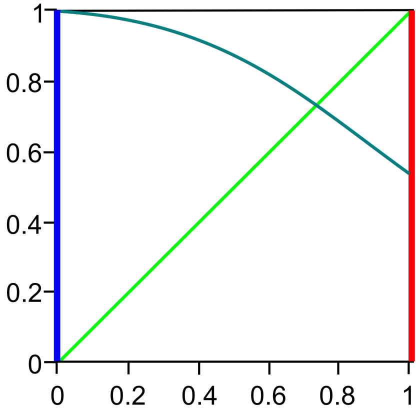
- Falls NP$=$ P $\Rightarrow$ PPAD effizient lösbar
- Ähnliche Probleme:
  - End of the line
  - Brouwer Fixpunkt
  - Sperner's Lemma

End of line

Definition

Ein Knoten in einem gerichteten Graphen ist ***unbalanciert****, wenn sich der In- und Ausgrad unterscheiden.*

- Eingabe: Gerichteter Graph G mit 2^n vielen Knoten und ein unbalancierter Knoten v
- Ausgabe: Ein anderer unausbalancierter Knoten

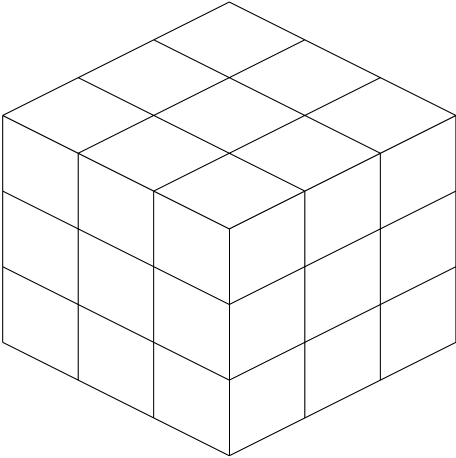


Satz

Jede stetige Funktion f von der Einheitskugel mit Dimension n zur Einheitskugel mit Dimension n hat einen Punkt x mit $f(x) = x$ (Fixpunkt).

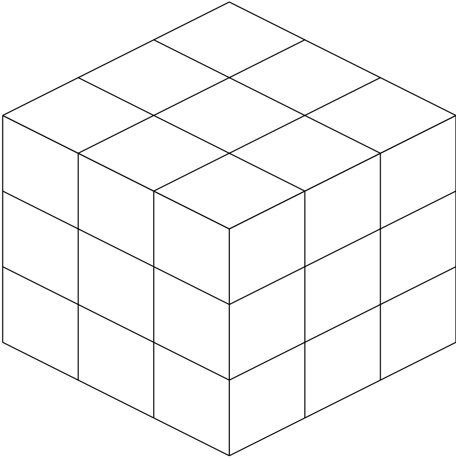
BROUWER- ein PPAD-vollständiges Problem

- Funktion ϕ von 3D-Einheitswürfel nach 3D-Einheitswürfel



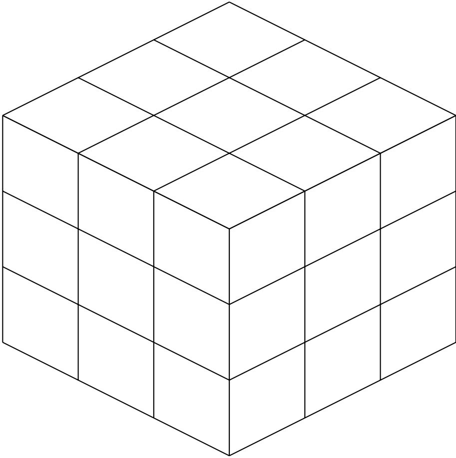
BROUWER- ein PPAD-vollständiges Problem

- Funktion ϕ von 3D-Einheitswürfel nach 3D-Einheitswürfel
- Teile Würfel in 2^{3n} gleiche cubelets mit Seitenlänge $\epsilon = 2^{-n}$



BROUWER- ein PPAD-vollständiges Problem

- Funktion ϕ von 3D-Einheitswürfel nach 3D-Einheitswürfel
- Teile Würfel in 2^{3n} gleiche cubelets mit Seitenlänge $\epsilon = 2^{-n}$
- x cubelet center, dann $\phi(x) = x + \delta_i$ mit
  - $\delta_0 = (-\epsilon, -\epsilon, -\epsilon)$
  - $\delta_1 = (\epsilon, 0, 0)$
  - $\delta_2 = (0, \epsilon, 0)$
  - $\delta_3 = (0, 0, \epsilon)$



Definition

Ein Punkt heißt Fixpunkt, wenn dieser ein innerer Eckpunkt eins cubelet ist und in allen acht adjazenten cubelets alle vier Abweichungen von $\delta_i (i = 0, \ldots, 3)$ *vorkommen.*

- Beachte Wertebereich von ϕ, falls vom Würfel außen liegt
- Gesucht wird ein Fixpunkt

Wie wird ϕ dargestellt?

- ϕ als Schaltkreis aus AND-, OR-, NOT-Gattern
- Eingabe ist $3n$ Bits lang
- Ausgabe 2 Bits lang
- Problem: Schaltkreis für ϕ und gesucht ein Fixpunkt von ϕ

Wie wird ϕ dargestellt?

- ϕ als Schaltkreis aus AND-, OR-, NOT-Gattern
- Eingabe ist $3n$ Bits lang
- Ausgabe 2 Bits lang
- Problem: Schaltkreis für ϕ und gesucht ein Fixpunkt von ϕ

Fakt: BROUWER ist PPAD-vollständig.
Jetzt: Reduktion von BROUWER auf NASH

Reduktionsansatz

- Interpretiere BROUWER als Graphenspiel
- Statt Fixpunkt wird ein Nash Gleichgewicht gesucht

Reduktionsansatz

- Interpretiere BROUWER als Graphenspiel
- Statt Fixpunkt wird ein Nash Gleichgewicht gesucht
- Ein Spieler hat nur 2 Strategien (0 oder 1)
- gemischte Strategien ist die Wahrscheinlichkeit Strategie 1 zu wählen
- 3 Spieler wählen jeweils eine Koordinate für einen Punkt im Würfel

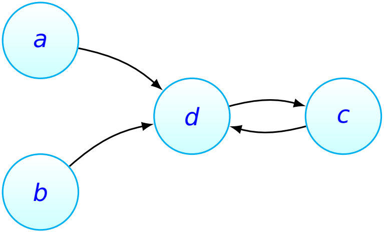
Reduktionsansatz

- Interpretiere BROUWER als Graphenspiel
- Statt Fixpunkt wird ein Nash Gleichgewicht gesucht
- Ein Spieler hat nur 2 Strategien (0 oder 1)
- gemischte Strategien ist die Wahrscheinlichkeit Strategie 1 zu wählen
- 3 Spieler wählen jeweils eine Koordinate für einen Punkt im Würfel
- restliche Spieler suchen den entsprechenden cubelet und berechnen δ_i von Nachbarn
- Ziel: Spieler ändern ihre Strategie, wenn Punkt kein Fixpunkt ist.

- Problem: logische und arithmetische Operationen im Schaltkreis und bei der Berechnung von ϕ
- Interpretation von logische und arithmetische Operationen als kleine Spiele
- Spieler als Ein- und Ausgabe

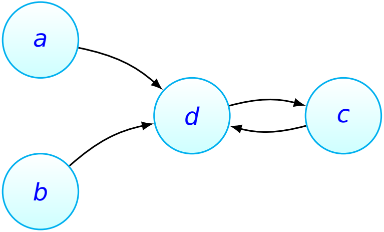
Multiplikation als Spiel

- 4 Spieler(a,b,c,d)
- Eingabe: a,b
- Ausgabe: c (Wert der Multiplikation der beiden gemischten Strategien)



Multiplikation als Spiel

- 4 Spieler(a,b,c,d)
- Eingabe: a,b
- Ausgabe: c (Wert der Multiplikation der beiden gemischten Strategien)
- Spieler c hat den Gewinn 1, falls d 1 spielt
- Spieler c hat Gewinn -1, falls d 0 spielt
- Spieler d spielt 1 mit Gewinn 1, falls a,b 1 spielen, sonst Gewinn 0
- Spieler d spielt 0 mit Gewinn 1, falls c 1 spielt, sonst Gewinn 0
- ⇒ c spielt mit Wahrscheinlichkeit a·b Strategie 1
- c spielt nicht mit einer höherer Wahrscheinlichkeit 1, denn sonst würde d 0 spielen wollen



Das Graphenspiel

- 3 Spieler(„Leaders”) mit der gemischten Strategie als Punkt (x,y,z) im Einheitswürfel
- Leaders als Eingabe für die Minispiele um den cubelet zu finden
- Ausgabe von $3n$ Bits als Eingabe für ϕ
- ϕ ist der Schaltkreis in Form von Minispielen für logische Operatoren
- Wiederhole ϕ für die Nachbarn
- Sind alle δ_i vertreten?
- Entscheidung, ob (x,y,z) Fixpunkt

Der brüchige Vergleichsoperator

- Das Spiel für den Vergleichsoperator liefert jegliche Werte, wenn Eingabe gleich

Der brüchige Vergleichsoperator

- Das Spiel für den Vergleichsoperator liefert jegliche Werte, wenn Eingabe gleich
- Aber korrekte Vergleichsoperatoren gibt es nicht

Der brüchige Vergleichsoperator

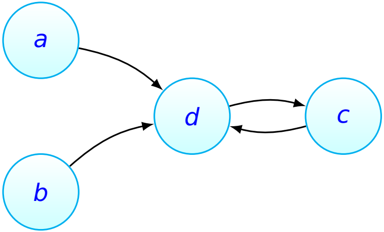
- Das Spiel für den Vergleichsoperator liefert jegliche Werte, wenn Eingabe gleich
- Aber korrekte Vergleichsoperatoren gibt es nicht
- Lösung: Berechne für mehrere Punkte im Umkreis

Mit weniger Spielern

- Bisher: Sehr viele Spieler
- Fakten über den Graph: bipartit, Ingrad von allen Knoten ≤ 3

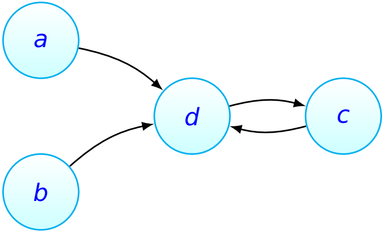
Mit weniger Spielern

- Bisher: Sehr viele Spieler
- Fakten über den Graph: bipartit, Ingrad von allen Knoten ≤ 3
- Idee: Spieler sind Anwälte und vertreten nur Spieler in Knoten
- Problem: Interessenkonflikte
- Konfliktgraph erstellen mit Kanten zwischen u, v wenn
  1. Kante zwischen u, v besteht oder
  2. $\exists w$ mit Kante (u, w) und (v, w)



Mit weniger Spielern

- Bisher: Sehr viele Spieler
- Fakten über den Graph: bipartit, Ingrad von allen Knoten ≤ 3
- Idee: Spieler sind Anwälte und vertreten nur Spieler in Knoten
- Problem: Interessenkonflikte
- Konfliktgraph erstellen mit Kanten zwischen u, v wenn
  1. Kante zwischen u, v besteht oder
  2. $\exists w$ mit Kante (u, w) und (v, w)
- Konfliktgraph ist 4-färbbar $\rightarrow$ 4 Anwälte reichen
- Reichen 3 oder 2 Spieler? Ja.



Wie gut sind approximierte Lösungen für NASH?

Freie Universität Berlin

- Für mehr als 2-Spieler immer eine Approximation.
- Für 2-Spieler Spiele: $\frac{1}{2}-$Approxmation effizient berechenbar
- Für ein beliebiges Spiel: $\epsilon-$Approximation in Zeit $\mathcal{O}(n^{\frac{logn}{\epsilon^2}})$ (Quasi-poly)

Zusammenfassung

- NASH ist PPAD-vollständig
- Für PPAD Probleme ist bekannt, dass eine Lösung existiert.
- NP-vollständige Probleme sind „schwerer” als Probleme aus PPAD
- Für PPAD-vollständige Probleme sind keine effizienten Algorithmen bekannt

Schlussfolgerung und Ausblick

- „If your laptop cannot find it, neither can the market.”, Kamal Jain
- Um ein für bestimmte Spiele effiziente Lösungen finden, müssen spezielle Eigenschaften des Spiels ausgenutzt werden
- Beispiel: 2-Spieler Nullsummenspiel