Seminar über Algorithmen 29.10.2013

Nash-Gleichgewichte in 2-Spieler Systemen

Katharina Klost *Wolfgang Mulzer, Yannik Stein*

1 Simultane Spiele

1.1 Begriffsdefinitionen

Ein *Bimatrixspiel* sei gegeben durch die $m \times n$ Matrizen A und B. Diese Matrizen heißen *Gewinnmatrizen* für Spieler 1 bzw. Spieler 2. Spieler 1 spielt die Zeilen und Spieler 2 spielt die Spalten. Wenn Spieler 1 Zeile i und Spieler 2 Spalte j spielt ergibt sich der Gewinn eines Spielers aus dem Wert a_{ij} bzw. b_{ij} der jeweiligen Gewinnmatrix.

Wenn ein Spieler deterministisch eine Strategie spielt, ist dies eine *reine Strategie*.

Eine *gemischte Strategie* ist definiert als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über allen Strategien eines Spieler.

Der *Support* einer gemischten Strategie ist definiert als die Menge der reinen Strategien mit Wahrscheinlichkeit größer 0. Gemischte Strategien von Spieler 1 werden mit x, solche von Spieler 2 mit y bezeichnet.

Es wird davon ausgegangen, dass die reinen Strategien disjunkt sind. Die Menge der reinen Strategien von Spieler 1 wird mit $M = \{1, 2, \cdots, m\}$, die von Spieler 2 mit $N = \{m+1, \cdots, n+m\}$ bezeichnet.

1.2 Die beste Antwort Bedingung

Eine gemischte Strategie x von Spieler 1 ist eine *beste Antwort* auf eine Strategie y von Spieler 2, wenn der erwartete Gewinn maximal ist. Ein Paar (x, y) gemischter Strategien bildet ein *Nash-Gleichgewicht*, wenn sie beste Antworten aufeinander sind.

Satz 1 (Beste Antwort Bedingung). *Eine Strategie x ist eine beste Antwort auf y gdw. für alle $i \in M$ gilt:*

$$x_i > 0 \implies (Ay)_i = u = max\{(Ay)_k | k \in M\} \tag{1}$$

Beweis. $(Ay)_i$ gibt den erwarteten Gewinn an, wenn Spieler 1 Zeile i spielt.

$$x^\top Ay = \sum_{i \in M} x_i (Ay)_i = u - \sum_{i \in M} x_i (u - (Ay)_i)$$

Da $x_i \geq 0$ und $u - (Ay)_i \geq 0$ für alle $i \in M$ gilt, ist $x^\top Ay \leq u$. $x^\top Ay = u$ gilt dann nur, wenn $x_i > 0$ impliziert, dass $(Ay)_i = u$ ist. □

Ein Spiel heißt *nicht-degeneriert*, wenn keine gemischte Strategie mit einer Supportgröße von k mehr als k beste Antworten hat. In einem *degenerierten* Spiel ist gibt es Strategien mit Supportgröße k die mehr als k beste Antworten haben.

Aus Satz 1 folgt, dass (x, y) in einem Nash-Gleichgewicht eines nicht-degenierten Bimatrixspiele gleiche Supportgröße haben. Daraus ergibt sich ein naiver Algorithmus zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten bei dem für alle Supportpaare ein Paar von gemischten Strategien berechnet wird, bei dem der erwartete Gewinn des anderen Spieler für alle reinen Strategien aus dem Support gleich ist. Wenn Gleichung (1) für beide Vektoren gilt, wurde ein Gleichgewicht gefunden.

1.3 Beschriftete Polytope

Ein bestes Antwort Polytop ist definiert durch die Menge der gemischten Strategien zusammen mit dem erwarteten Gewinn des **anderen** Spielers. Die Bedingungen der Polytope können vereinfacht werden, wenn angenommen wird, dass die Gewinnvariablen u und v immer positiv sind, A und $B^\top$ also nicht-negativ sind und keine Nullspalten haben.

Dann ergibt sich für die Polytope P und Q:

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^M | x \geq \mathbf{0}, B^\top x \leq \mathbf{1}\} \\ Q &= \{y \in \mathbb{R}^N | Ay \leq \mathbf{1}, y \geq \mathbf{0}\} \end{aligned} \tag{2}$$

Ein Punkt x aus einem der Polytope ist mit Label $k \in M \cup N$ beschriftet, wenn die k-te Ungleichung bindend ist. Die Zählung geht dabei in der Definition von links nach rechts.

Ein Paar von Punkten $((x, u), (y, v))$, $x \in P, y \in Q$ heißt *komplett beschriftet*, wenn alle Label $k \in M \cup N$ als Label eines der Punkte vorkommt. Ein solches Paar beschreibt ein Nash-Gleichgewicht, da ein fehlendes Label, z.B von Spieler 1 eine reine Strategie mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 0 beschreibt, für die die passende Ungleichung aber nicht bindend, also die reine Strategie keine beste Antwort ist. Dadurch ist (1) verletzt und das Paar ist kein Gleichgewicht.

Die Punkte werden zu Wahrscheinlichkeitsvektoren, wenn sie mit $v = 1/(\mathbf{1}^\top x)$ bzw. $u = 1/(\mathbf{1}^\top y)$ multipliziert werden. Diese u und v geben den erwarteten Gewinn an.

In nicht-degenerierten Spielen haben nur die Ecken der Polytope m bzw. n Label, so dass nur Ecken der Polytope für Gleichgewichte in Frage kommen. Daraus ergibt sich:

Algorithmus 2.

Eingabe: Ein nicht-degeneriertes Bimatrixspiel
Ausgabe: Alle Nash-Gleichgewichte des Spieles
Methode: Iteriere über alle Eckenpaare, wenn ein Paar aus $P - \{0\} \times Q - \{0\}$ komplett beschriftet ist, gebe es reskaliert als gemischte Strategie aus.

Da es weniger Ecken als mögliche Supports gibt, ist Algorithmus 2 schneller als der erste beschriebene Algorithmus. Die Anzahl der Ecken ist exponentiell groß.

1.4 Der Lemke-Howson Algorithmus

Die bisher beschriebenen Algorithmen finden alle Gleichgewichte in einem Spiel. Der Lemke-Howson Algorithmus (LH) findet ein Gleichgewicht des Spieles. Die Idee ist, dass der Algorithmus abwechselnd in jedem Polytop eine Kante entlang läuft, bis ein komplett beschriftetes Paar gefunden wird. Der Algorithmus startet dabei in einem Gleichgewicht meist im künstlichen Gleichgewicht $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Dort wird ein Label "fallen gelassen" also der Kante zu der Ecke gefolgt, in der das Label nicht mehr vorkommt. Dort wird entweder das "fehlende Label" gefunden oder ein Label kommt in beiden Polytopen im aktuellen Paar vor. Dann wird dieses Label im anderen Polytop fallen gelassen.

Algorithmus 3 (Lemke-Howson)**.**

Eingabe: Ein nicht degeneriertes Bimatrix Spiel

Ausgabe: Ein Nash-Gleichgewicht des Spieles

Methode: Wähle ein "fehlendes Label" $k \in M \cup N$. Sei $x, y = (0, 0) \in P \times Q$. Lasse Label k fallen.

Schleife: Nenne das neue Eckenpaar (x, y), sei l das Label, dass aufgenommen wurde. Wenn $l = k$ breche die Schleife mit dem Nash-Gleichgewicht (x, y) ab (das als gemischte Strategie skaliert wurde).

Sonst lasse l im anderen Polytop fallen und wiederhole die Schleife.

1.5 Implementierung des LH-Algorithmus

Der LH-Algorithmus kann mit Integer Pivotierung implementiert werden. Die Bewegung entlang der Kanten des Polytops werden dabei, wie beim Simplexalgorithmus durch einen Wechsel der Basis implementiert. Die Variable, die die Basis betritt, ist dann das Label das fallengelassen wird. Die Variable die die Basis verlässt dementsprechend das aufgesammelte Label. Der Algorithmus endet wieder, wenn das am Anfang fallen gelassene Label aufgesammelt wird.

2 Extensive Spiele

Extensive Spiele sind eine Möglichkeit um sequentielle Handeln von Spielern zu beschreiben, extensive Spiele werden durch einen Spielbaum beschrieben.

Die Knoten des Baumes beschreiben Zustände und jeder Knoten ist genau einem Spieler zugeordnet. In den Blättern stehen die Gewinne der Spieler. Die Knoten sind in *Informationsmengen* unterteilt. Von allen Knoten in einer Informationsmenge aus können die gleichen Züge gemacht werden, der Spieler weiß aber nicht, in welchem Knoten er sich befindet. Informationsmengen simulieren, dass ein Spieler die vorherigen Züge der anderen Spieler nicht kennt. Die Menge der Informationsmengen eines Spielers i ist mit H_i bezeichnet, Informationsmengen mit h und die Menge der Möglichen Züge in einer Informationsmenge mit C_h.

Eine *Verhaltensstrategie* für Spieler i ist durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über C_h für alle h in H_i gegeben. Bei einer *reinen Strategie* wird jeder Zug deterministisch gewählt. Eine *gemischte Strategie* wird durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über alle reinen Strategien gegeben.

Aus den Gewinnen für alle reinen Strategien lassen sich Gewinnmatrizen erstellen und darüber Gleichgewichte berechnen. Diese Matrizen sind jedoch exponentiell groß in der Größe des Spielbaumes.

2.1 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Um den Rechenaufwand verringern zu können Teilspiele betrachtet werden. Teilspiele sind Teilbäume des Spielbaumes, wobei alle Knoten einer Informationsmenge enthalten sind, wenn ein Knoten der Informationsmenge enthalten ist. Diese Teilspiele sind meistens sehr viel kleiner. Nun werden von unten nach oben die Nash-Gleichgewichte der Teilspiele berechnet und die Wurzeln der Teilspiele durch die Gewinne des Gleichgewichts ersetzt.

2.2 Reduzierte Strategische Form

In der normalen Strategischen Form werden auch Züge in Informationsmengen betrachtet, die nicht erreicht werden können. In der reduzierten Strategischen Form werden diese durch eine Platzhalter ersetzt und erscheinen so nicht in den Gewinnmatrizen was diese reduziert. Auch die reduzierte Strategische Form hat im schlechtesten Fall exponentielle Größe in der Größe des Spielbaumes.

2.3 Die Sequenzform

Eine Sequenz von Zügen eines Spielers i ist der Pfad von der Wurzel des Baues zu einem Knoten t. Dieser wird mit $\sigma_i(t)$ bezeichnet und beinhaltet nur Knoten die zu Spieler i gehören.

Für eine Verhaltensstrategie β_i von Spieler i gilt:

$$\sum_{c \in C_h} \beta_i(c) = 1, \beta_i(c) \geq 0 \text{ für } h \in H_i, c \in C_h \tag{3}$$

Eine Sequenz ist entweder die leere Sequenz $\emptyset$ oder durch den letzten Zug in einer Informationsmenge gegeben. Damit ergibt sich, dass die Menge S_i der Sequenzen eines Spielers i maximal $|S_i| = 1 + \sum_{h \in H_i} |C_h|$ Elemente hat und damit linear in der Größe des Spielbaumes ist.

Die *Realisationswahrscheinlichkeit* $\beta_i[\sigma]$ einer Sequenz σ unter β_i ist definiert als $\prod_{c \in \sigma} \beta_i(c)$.

Die Realisationswahrscheinlichkeit für eine Sequenz σ bei einer gegebenen gemischten Strategie μ_i kann als $\mu_i[\sigma] = \sum_{\pi_i} \mu_i(\pi_i)\pi_i[\sigma]$ berechnet werden. Dabei ist $\pi_i[\sigma]$ die Realisationswahrscheinlichkeit von σ unter einer reinen Strategie π_i. Diese ist 1, wenn alle Züge aus σ in π_i enthalten sind und 0 sonst.

Für Spieler 1 kann dann eine Abbildung $x : S_1 \mapsto \mathbb{R}, x(\sigma) = \mu_1[\sigma]$ für $\sigma \in S_1$ definiert werden, die *Realisationsplan* genannt wird. y für Spieler 2 ist analog definiert.

Folgerung 4. *Ein Realisationsplan x einer gemischten Strategie von Spieler 1 erfüllt $x(\sigma) \geq 0$ für alle $\sigma \in S_1$ und :*

$$x(\emptyset) = 1, \sum_{c \in C_h} x(\sigma c) = x(\sigma) \textit{ für alle } h \in H_1 \tag{4}$$

Dies gilt auch für Spieler 2 mit einem Realisationsplan y.

Folgerung 5 (Satz von Kuhn). *Für einen Spieler mit vollständiger Erinnerung ist jede gemischte Strategie realisationsäquivalent zu einer Verhaltensstrategie*

Wenn eine Verhaltensstrategie β_i für Spieler i gegeben ist, ergibt sich die passende gemischte Strategie wie folgt: Jeder reinen Strategie wird als Wahrscheinlichkeit das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten der Züge in den Informationsmengen zugewiesen.

Wenn eine gemischte Strategie μ_i für Spieler i gegeben ist, ergibt sich die zugehörige Verhaltensstrategie folgendermaßen: In jeder Informationmenge $h \in H_i$ ist $\beta_i(c)$ definiert als $\frac{x(\sigma_h c)}{x(\sigma_h)}$, für alle $c \in C_h$.

Die linearen Bedingungen aus Satz 4 können in der Form $Ex = x, x \geq 0$ und $Fy = f, y \geq 0$ dargestellt werden. Die Matrizen haben $1 + |H_i|$ Zeilen und $|S_i|$ Spalten. Die erste Zeile von E bzw. F zusammen mit e bzw. f drückt die Gleichung $x(\emptyset) = 0$ aus, die weiteren Zeilen die Gleichungen $-x(\sigma_h) + \sum_{c \in C_h} x(\sigma_h)c = 0$.

Die Gewinnmatrizen in der Sequenzform haben die Gewinne $a(t)$ bzw. $b(t)$ an den Einträgen für alle Sequenzpaaren die zu Blättern führen und sind sonst leer. Die Anzahl der nicht leeren Einträge ist linear in der Größe des Spielbaumes.

Die Bedingungsmatrizen E, F und die Gewinnmatrizen A, B definieren die Sequenzform des Spieles.

2.4 Gleichgewichtsberechnung in der Sequenzform

Für Nullsummenspiele kann ein Gleichgewicht mit Hilfe eines Linearen Programmes, das lineare Größe in der Größe des Spielbaumes hat gefunden werden.

Für eine gegebene Strategie y von Spieler 2 ist eine beste Antwort von Spieler 1 gegeben durch das Lineare Programm

$$\text{maximiere } x^\top(Ay) \text{ unter den Bedingungen } Ex = x, x \geq 0 \tag{5}$$

Für Spieler 2 ergibt sich analog:

$$\text{maximiere } (x^\top B)y \text{ unter den Bedingungen } Fy = y, y \geq 0 \tag{6}$$

Aus den dualen Linearen Programmen ergibt sich:

$$x^\top(E^\top u - Ay) = 0 \tag{7}$$
$$y^\top(F^\top v - B^\top x = 0 \tag{8}$$

Satz 6. *Gegeben sei ein 2-Spieler Spiel in extensiver Form mit den Gewinnmatritzen A,B und den Bedingungsmatrizen E,F. Dann bildet ein Paar (x,y) von Realisationsplänen ein Nash-Gleichgewicht, genau dann wenn es Vektoren u, v gibt für die gilt:*

$$Ex = e, x \geq 0 \qquad\qquad Fy = f, y \geq 0 \tag{9}$$
$$E^\top u - Ay \geq 0, \qquad\qquad F^\top - B^\top x \geq 0 \tag{10}$$

und 7 und 8 wahr sind. Die Größe der Matrizen ist linear in der Größe des Spielbaumes.

Die Bedingungen in (9) und (10) definieren ein Lineares Komplementaritätsproblem, dieses kann mit einer Variante des LH-Algorithmuses gelöst werden.