Freie Universität Berlin

Nash-Gleichgewichte in 2-Spieler Systemen

Katharina Klost
Freie Universität Berlin

Seminar über Algorithmen, 29.10.2013

Grundlegende Definitionen

- A Gewinnmatrix für Spieler 1, B Gewinnmatrix für Spieler 2
- Spieler 1 ist "Zeilenspieler" mit Strategien $M = \{1, \cdots, m\}$
- Spieler 2 ist "Spaltenspieler" mit Strategien $N = \{m+1, \cdots, n+m\}$
- *gemischte Strategie x* für Spieler 1: m-Vektor von Wahrscheinlichkeiten
- y für Spieler 2 analog
- *Support* einer gemischten Strategie: Menge der reinen Strategien mit positiver Wahrscheinlichkeit

Beste Antwort und Nash-Gleichgewicht

- *beste Antwort* x auf y maximiert $x^{\top}Ay$
- Paar von besten Antworten ist *Nash-Gleichgewicht*

Satz (Beste Antwort Bedingung)

Seien x, y gemischte Strategien von Spieler 1 bzw. Spieler 2. Dann ist x eine beste Antwort auf y genau dann wenn für alle $i \in M$ gilt:

$$x_i > 0 \Rightarrow (Ay_i) = u = \max\{(Ay)_k | k \in M\} \tag{1}$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
x^\top Ay &= \sum_{i \in M} x_i (Ay)_i \\
&= \sum_{i \in M} x_i (u - (u - (Ay)_i)) \\
&= u - \sum_{i \in M} x_i (u - (Ay)_i)
\end{aligned}
$$

$x^\top Ay \leq u$, da $x_i \geq 0$ und $u - (Ay)_i \geq 0$ für alle $i \in M$
Dann ist $x^\top Ay = u$ genau dann, wenn $x_i > 0$ $(Ay)_i = u$ impliziert.

Beispiel

Gegeben sei folgende Bimatrixspiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ein reines Nash-Gleichgewicht: $x = (1, 0, 0), y = (1, 0)$
- Gemischtes Gleichgewicht: Prüfen von Supportpaaren

Gleichgewichte des Beispiels

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Prüfe ob mit Support $\{1, 2\}$ für Spieler 1 und $\{4, 5\}$ für Spieler 2 ein Gleichgewicht entsteht
  - Mögliches Gleichgewicht ist Lösung für

$$\begin{array}{rrcll} x_1 + & x_2 & = & 1 & \\ 3x_1 + & 2x_2 & = & 2x_1 & +6x_2 \\ y_4 + & y_5 & = & 1 & \\ 3y_4 + & 3y_5 & = & 2y_4 & +5y_5 \end{array}$$

  - $x = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0), y = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ist ein Nash-Gleichgewicht, weil (1) für $Ay = (3, 3, 2)^\top$ und für $x^\top B = (\frac{8}{3}, \frac{8}{3})^\top$ gilt.

Gleichgewichte des Beispiels

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Prüfe ob mit Support $\{1, 3\}$ für Spieler 1 und $\{4, 5\}$ für Spieler 2 ein Gleichgewicht entsteht
  - Mögliches Gleichgewicht ist Lösung für

$$\begin{array}{rrcll} x_1 + & x_2 & = & 1 & \\ 3x_1 + & 3x_2 & = & 2x_1 & +1x_2 \\ y_4 + & y_5 & = & 1 & \\ 3y_4 + & 3y_5 & = & 0y_4 & +6y_5 \end{array} \tag{2}$$

  - $x = (2, 0, -1), y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ergibt kein Gleichgewicht, x ist kein Warscheinlichkeitsvektor, und $Ay = (3, \frac{7}{2}, 3)$ verletzt die beste Antwort Bedingung.
  - Idee: Alle Supportpaare testen

Degenerierte Spiele

- Für dieses Beispiel müssen nur gleich große Supports getestet werden → nicht-degeneriert Fall.

Definition (Nicht-degeneriertes Spiel)

*Ein Spiel heißt **nicht-degeneriert** wenn keine gemischte Strategie mit Supportgröße k mehr als k beste Antworten hat. Ein Spiel heißt **degeneriert**, wenn es nicht nicht-degeneriert ist.*

Satz

In jeden Nash-Gleichgewicht eines nicht-degenerierten Spiels haben x und y gleiche Supportgröße.

Algorithmus

Eingabe: Ein nicht-degeneriertes Bimatrix Spiel.
Ausgabe: Alle Nash-Gleichgewicht des Spiels.
Methode: Für jedes $k = \{1, \ldots, \min\{m, n\}\}$ und jedes Paar I, J der k großen Teilmengen von M und N, löse die Gleichungen

$$\sum_{i \in I} x_i b_{ij} = v, \quad j \in J \qquad \sum_{i \in I} x_i = 1$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} y_j = u, \quad i \in I \qquad \sum_{j \in J} y_j = 1$$

Wenn $x \geq 0 \vee y \geq 0$ und (1) wahr ist, gebe x, y als Gleichgewicht aus.

Laufzeit: für $n = m := \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \approx 4^n$

Beschriftete Polytope

Definition (beste Antwort Polytope)

$$\overline{P} = \{(x, v) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} | x \geq 0, 1^\top x = 1, B^\top x \leq 1v\},$$
$$\overline{Q} = \{(y, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} | Ay \leq 1u, 1^\top y = 1, y \geq 0\}$$

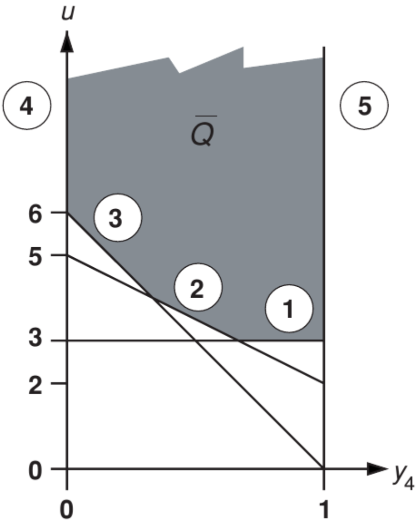
- Ein Punkt $(y, u) \in \overline{Q}$ ist mit den Label k beschriftet, wenn die k-te Ungleichung bindend ist.
- Die Label für Punkte $(x, v) \in \overline{P}$ sind entsprechend definiert.
- Ein Paar von Punkten $(x, v), (y, u)$ heißt **komplett beschriftet**, wenn jedes Label $k \in M \cup N$ in einem der beiden Punkte vorkommt.

Satz

Ein gemischtes Strategiepaar x, y bildet genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn das zugehörige Punktepaar komplett Beschriftet ist.

Diese Bedingung ist äquivalent zur besten Antwort Bedingung.

Beispiel



$$\overline{Q}:$$

$$\begin{aligned} 3y_4 + 3y_5 &\leq u \\ 2y_4 + 5y_5 &\leq u \\ 0y_4 + 6y_5 &\leq u \\ y_4 &\leq 0 \\ y_5 &\leq 0 \end{aligned}$$

Vereinfachte Polytope

- Bei positiven Gewinnen können die Polytope vereinfacht werden.
- Wir nehmen an: A und $B^\top$ sind nicht negativ und haben keine Nullspalten.
- Teilen der Gleichungen durch die Gewinn ergibt:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^M | x \geq 0, B^\top x \leq 1\}$$
$$Q = \{y \in \mathbb{R}^N | Ay \leq 1, y \geq 0\}$$

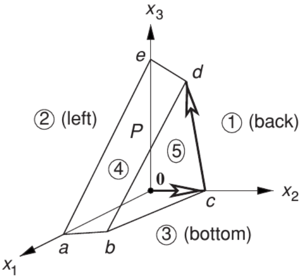
- Vektoren x aus P oder y aus Q werden wieder zu Wahrscheinlichkeiten in dem sie mit $v = \frac{1}{1^\top x}$ bzw. $u = \frac{1}{1^\top y}$ multipliziert werden.

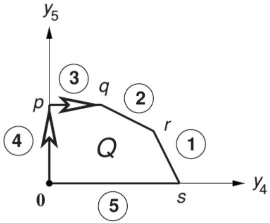
- Es gibt die Label erhaltene Bijektionen

$$\overline{P} \to P - \{0\} \qquad (x, v) \mapsto x \cdot \frac{1}{v}$$
$$\overline{Q} \to Q - \{0\} \qquad (y, u) \mapsto y \cdot \frac{1}{u}$$

- Ein Gleichgewicht ist ein komplett beschriftetes Paar $(x, y) \in \{P - \{0\} \times Q - \{0\}\}$.

Beispiel





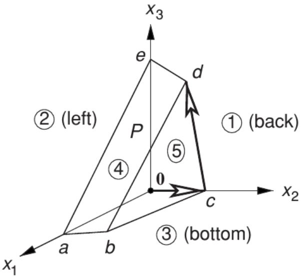
Nicht-degeneriertheit und Polytope

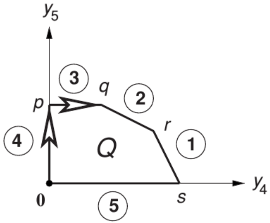
- In nicht-degenerierten Spielen hat kein Punkt in Q mehr als n Label und kein Punkt in P mehr als m Label.
- Nur Ecken kommen für Gleichgewichte in Frage
- Idee für Algorithmus: Alle Eckenpaare prüfen.
- Weniger Ecken als Supportpaare → bessere Laufzeit (weniger als $2,6^n$ Ecken pro Polytop)
- Iterieren über alle Ecken eines Polytopes ist bekanntest Problem.

Idee zum Lemke-Howson Algorithmus

- Vorher: Alle Gleichgewichte, jetzt nur ein Gleichgewicht
- Idee: Beginnend in einem Gleichgewicht Wechselseitig in den Polytopen eine Kante entlang laufen, bis ein komplett Beschriftetes Paar gefunden wird.
- Startgleichgewicht ist das künstliche Gleichgewicht $(0, 0)$

Beispiel





Freie Universität Berlin

Algorithmus

Eingabe: Ein nicht-degeneriertes Bimatrixspiel
Ausgabe: Ein Nash-Gleichgewicht des Spieles
Methode:

- Wähle ein beliebiges Label $k \in M \cup N$. k ist das "fehlende Label".
- Lasse k in dem Polytop, in dem es enthalten ist, fallen.
- Sei l das aufgesammelte Label und (x, y) das aktuelle Knotenpaar
- **solange** $l \neq k$**:**
  - Lasse l fallen.
  - Sei l das neu aufgesammelte Label und (x, y) das aktuelle Knotenpaar
- Gebe (x, y) skaliert als gemischte Strategie aus

Korrektheit, Terminierung

- Terminierung: An jeder Ecke kann nur ein Label aufgenommen werden also ist des Weg eindeutig
- Korrektheit: Nur komplett beschriftete Paare bilden ein Gleichgewicht. Wenn der Algorithmus terminiert, wurde ein Gleichgewicht gefunden.

Schlussfolgerung

- Pfad ist ein Pfad auf Polytop $P \times Q$, gegeben durch die Paare (x, y) mit jedem Label aus $M \cup N - \{k\}$
- Für festes $k \longrightarrow$ Graph
- Graph besteht aus disjunkten Pfaden
- Endpunkte komplett beschriftet $\Rightarrow$ ungerade Anzahl an Nash-Gleichgewichten
- Nicht alle Gleichgewichte können gefunden werden (z.B. symetrische Spiele)

Integer Pivotierung

- Bedingungen werden als Gleichungen mit Slackvariablen dargestellt
- $B^\top x + s = 1, r + Ay = 1, x \geq 0, s \geq 0, r \geq 0, y \geq 0$
- Für das Beispiel ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & s_4 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & & & s_5 & = & 1 \end{array}$$

Integer Pivotierung

- Bedingungen werden als Gleichungen mit Slackvariablen dargestellt
- $B^\top x + s = 1, r + Ay = 1, x \geq 0, s \geq 0, r \geq 0, y \geq 0$
- Für das Beispiel ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & s_4 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & & & s_5 & = & 1 \end{array}$$

$$s_4 = 1 - 2x_2 \qquad\qquad s_5 = 1 - 6x_2$$

Integer Pivotierung

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
18x_1 & + & 12x_2 & + & 18x_3 & + & 6s_4 & & & = & 6 \\
2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & & & s_5 & = & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
14x_1 & & & + & 16x_3 & + & 6s_4 & - & 2s_5 & = & 4 \\
2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & & & + & s_5 & = & 1
\end{array}$$

Integer Pivotierung

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
14x_1 & + & & & 16x_3 & + & 6s_4 & - & 2s_5 & = & 4 \\
32x_1 & + & 96x_2 & + & 16x_3 & & & + & 16s_5 & = & 16
\end{array}$$

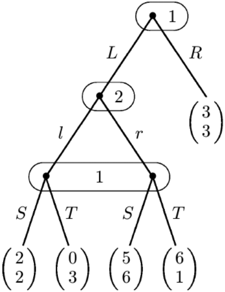
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
14x_1 & & & + & 16x_3 & + & 6s_4 & - & 2s_5 & = & 4 \\
18x_1 & + & 96x_2 & & & - & 6s_4 & + & 18s_5 & = & 12
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
14x_1 & & & + & 16x_3 & + & 6s_4 & - & 2s_5 & = & 4 \\
3x_1 & + & 16x_2 & & & - & s_4 & + & 3s_5 & = & 2
\end{array}$$

Degenerierte Spiele

- Unter Umständen unendlich viele Gleichgewichte
- Neue Definition für Gleichgewicht gesucht
- Gleichgewichtsdefinition über die konvexe Hülle

Extensives Spiel



Die Menge aller Informationsmengen eines Spielers i ist mit H_i bezeichnet, Informationsmengen mit h und die Menge der Züge in h mit C_h.

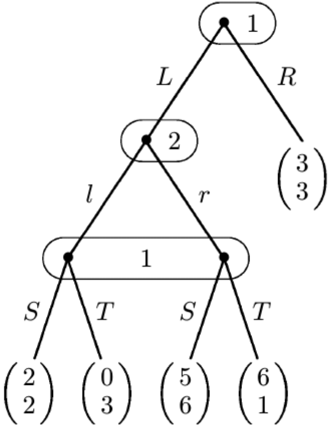
Strategien

- Wahrscheinlichkeitsverteilung über C_h für alle $h \in H_i$: *Verhaltensstrategie*
- Verhaltensstrategie mit jedem Zug deterministisch: *reine Strategie*. Reine Strategien sind Elemente aus $\Pi_{h \in H_i} C_h$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung über reine Strategien: *gemischte Strategie*

Definition (Strategische Form)

*Die Matrix aller reinen Strategien zusammen mit den erwarteten Gewinnen heißt **Strategische Form**. Diese kann exponentiell groß in der Größe des Spielbaums sein.*

Beispiel



$$A = \begin{array}{cc} l & r \\ \end{array}\quad \begin{array}{c} \\ \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}} \end{array} \begin{array}{c} \langle L, S\rangle \\ \langle L, T\rangle \\ \langle R, S\rangle \\ \langle R, T\rangle \end{array}$$

$$B = \begin{array}{cc} l & r \\ \end{array}\quad \begin{array}{c} \\ \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}} \end{array} \begin{array}{c} \langle L, S\rangle \\ \langle L, T\rangle \\ \langle R, S\rangle \\ \langle R, T\rangle \end{array}$$

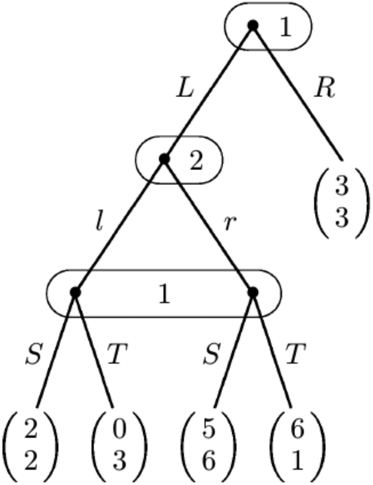
Teilspielperfekte Gleichgewichte

- Idee: Von unten nach oben Teilbäume betrachten.

Algorithmus (Teilspielperfektes Gleichgewicht)

Eingabe: Ein extensives Spiel
Ausgabe: Ein Teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht des Spiels
Methode: Betrachte von unten nach oben alle Teilspiele des Spieles, finde dort ein Gleichgewicht und ersetze den Teilbaum durch die erwarteten Gewinnen des Gleichgewichts.

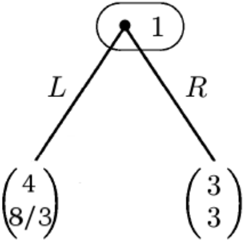
Beispiel



$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} l & r \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} l & r \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel



$$A = \begin{array}{c} \\ S \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} l & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ S \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} l & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Reduzierte Strategische Form

- Auch Gleichgewichte, die nicht Teilspielperfekt sind können von Interesse sein
- Einige Strategien sind über spezifisch, da sie nicht auftreten können.
- Diese können durch Platzhalter ersetzt werden, dadurch wird das Spiel kleiner (kann aber weiterhin exponentiell groß sein)

$$A = \begin{array}{c} \\ \langle L, S\rangle \\ \langle L, R\rangle \\ \langle R, *\rangle \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} l & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \langle L, S\rangle \\ \langle L, R\rangle \\ \langle R, *\rangle \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} l & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sequenzform

Definition (Sequenz)

Eine ***Sequenz*** $\sigma_i(t)$ *von Zügen eines Spieler i ist die Folge von Zügen (unabhängig von den Zügen des anderen Spielers) auf dem eindeutigen Pfad von der Wurzel zu einem Knoten t. Die leere Sequenz wird mit ∅ bezeichnet.*

- Für alle Sequenzen S_i von Spieler i gilt:
  $S_i = \{\emptyset\} \cup \{\sigma_h c | h \in H, c \in C_h\}$
- Anzahl der Sequenzen ist $|S_i| = 1 + \sum_{h \in H_i} |C_h|$

Wahrscheinlichkeiten

Wenn β_i eine Verhaltensstrategie von Spieler i ist, dann erfüllen alle Zugwahrscheinlichkeiten $\beta_i(c)$:

$$\sum_{c \in C_h} \beta_i(c) = 1, \qquad \beta_i(c) \geq 0 \text{ für } h \in H_i, c \in C_h$$

Definition (Realisationswahrscheinlichkeit)

Die ***Realisationswahrscheinlichkeit*** *einer Sequenz σ von Spieler i mit β_i ist definiert als*

$$\beta_i[\sigma] = \prod_{c \text{ aus } \sigma} \beta_i(c)$$

Erwarteter Gewinn

Die erwartete Gewinn eines Spieler ist dann:

$$\sum_{\text{Blätter } t} a(t)\beta_0[\sigma_0(t)]\beta_1[\sigma_1(t)]\beta_2[\sigma_2(t)]$$

Definition (Realisationswahrscheinlichkeiten für gemischte Strategien)

Gegeben eine gemischte Strategie μ_i von Spieler i und die Menge aller reinen Strategien π_i von Spieler i kann die Realisationswahrscheinlichkeit einer Sequenz unter μ_i als

$$\mu_i[\sigma] = \sum_{\pi_i} \mu_i(\pi_i)\pi_i[\sigma]$$

beschrieben werden. Dabei ist $\pi_i[\sigma] = 1$ wenn alle Züge aus σ in π_i beschrieben sind und 0 sonst.

Realisationspläne

Definition (Realisationsplan)

*Ein **Realisationsplan** x für Spieler 1 ist eine Abbildung von S_1 nach $\mathbb{R}$ die Definiert ist als $x(\sigma) = \mu_1[\sigma]$, für $\sigma \in S_1$. Ein Realisationsplan y für Spieler 2 ist analog definiert.*

Satz

Für jeden Realisationsplan x einer gemischten Strategie für Spieler 1 gilt $x(\sigma) \geq 0$ für alle $\sigma \in S_1$ und

$$x(\emptyset) = 1 \qquad \sum_{c \in C_h} x(\sigma_h c) = x(\sigma_h), \text{ für alle } h \in H_1. \tag{3}$$

Satz von Kuhn

Satz (Satz von Kuhn)

Für jeden Spieler mit ”volkommener Erinnerung” gibt es zu jeder gemischten Strategie eine realisationsäquivalente Verhaltensstrategie.

Beweis

Gegeben sei eine Verhaltensstrategie, dann ist die äquivaltente gemischte Strategie gegeben, durch das Produkt aller Zugwahrscheinlichkeiten entlang des Pfades der die Strategie beschreibt.
Gegeben sei eine gemischte Strategie, die Wahrscheinlichkeit für einen Zug ist dann gegeben, durch $\frac{x(\sigma_h c)}{x(\sigma_h)}$

Realisationspläne

- Realisationspläne werden als Vektoren $x \in \mathbb{R}^{|S_1|}$ und $y \in \mathbb{R}^{|S_2|}$betrachtet.
- Die Linearen Bedingungen aus (3) können als $Ex = e, x \geq 0$ und $Fy = f, y \geq 0$ geschrieben werden.
  E ist eine $|S_1| \times 1 + |H_1|$ Matrix und e ein $1 + |H_1|$ Vektor.
- Die erste Reihe drückt $x(\emptyset) = 1$ aus. Die anderen Zeilen $-x(\sigma_h) + \sum_{c \in C_h} x(\sigma_h c) = 0$
- Jede Sequenz kommt genau einmal mit Wert 1 auf der linken Seite der Gleichung vor. Die Anzahl der Zeilen ist maximal linear in der Größe des Spielbaumes.

Gewinnmatrix

- Die Einträge $a_{\sigma\tau}$ der $|S_1| \times |S_2|$ Gewinnmatrix A sind für alle $\sigma \in S_1, \tau \in S_2$ definiert als:

$$a_{\sigma\tau} = \sum_{\text{Blätter } t:\sigma_1(t)=\sigma,\sigma_2(t)\tau} a(t)\beta_0[\sigma_0(t)]. \qquad (4)$$

- Die Matrix B ist analog definiert.
- Die Gewinnmatrizen zusammen mit den Bedingungsmatritzen definieren die **Sequenzform** eines Spieles.

Beispiel

$$S_1 = \{\emptyset, L, R, LS, LT\} \qquad S_2 = \{\emptyset, l, r\}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & 1 & & \\ & -1 & & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{ccc|c} \emptyset & l & r & \\ \hline & & & \emptyset \\ & & & L \\ 3 & & & R \\ & 2 & 5 & LS \\ & 0 & 6 & LT \end{array} \qquad B = \begin{array}{ccc|c} \emptyset & l & r & \\ \hline & & & \emptyset \\ & & & L \\ 3 & & & R \\ & 2 & 6 & LS \\ & 3 & 1 & LT \end{array}$$

- Mit Hilfe von Linearen Programmen können Gleichgewichte von Nullsummenspielen berechnet werden
- Diese legen Grundlage für Linear Komplementäre Probleme → lösen von allgemeinen Spielen

Zusammenfassung

- Beste Antwort Bedingung gibt Aussage über reine Strategien
- Grundlage für verschiedene Algorithmen (z.B. Lemke-Howson)
- Sequenzielle Spiele werden exponentiell groß - Vereinfachen durch Sequenzform