

Network Formation Games

Robert Lion Gottwald

Wolfgang Mulzer, Yannik Stein

1 Local Connection Game

Zunächst betrachten wir ein *Network Formation Game*, bei dem jeder Spieler lokal Verbindungen herstellen kann, d.h. ein Spieler kann sich nur für direkte Verbindungen zu anderen Spielern entscheiden, aber nicht für Verbindungen zweier anderer Spieler, von denen er auch profitieren würde. Dabei kann sich ein Spieler einseitig dazu entscheiden, ob eine Verbindung hergestellt wird, er trägt aber dann die vollen Kosten dafür.

Modelliert werden die Spieler als Knoten in einem ungerichteten Graphen $G(V, E)$. Das Ziel eines jeden Spielers i ist es, den Abstand $dist(i, j)$ zu jedem anderen Spieler j zu minimieren und dabei so wenig wie möglich zu zahlen. Der Abstand $dist(i, j)$ ist die Anzahl der Kanten im kürzesten Pfad zwischen i und j oder ∞ , falls kein Pfad existiert. Dieser Kompromiss zwischen Konnektivität und Kosten wird durch den Parameter α modelliert, welcher den Kosten für eine Kante entspricht. Spieler i möchte also die Zielfunktion

$$\alpha n_i + \sum_j dist(i, j)$$

minimieren, wobei n_i die Anzahl der von Spieler i gekauften Kanten ist.

Beobachtung 1. *Ein Nash-Gleichgewicht für das Local Connection Game muss ein in einem zusammenhängenden Graphen resultieren, da sonst unendlich hohe Kosten entstünden.*

Die sozialen Kosten $SC(G)$ für einen Graphen $G(V, E)$ sind die aufsummierten Kosten aller Spieler:

$$\sum_{i \neq j} dist(i, j) + \alpha |E|$$

Im Folgenden wird der Preis der Anarchie sowie der Preis der Stabilität dieses Spiels analysiert.

Definition 2. *Der Preis der Anarchie ist das Verhältnis der Kosten des teuersten Nash-Gleichgewichtes c_N zu den Kosten der günstigsten Lösung c^* , also $\frac{c_N}{c^*}$.*

Definition 3. *Der Preis der Stabilität ist das Verhältnis der Kosten des günstigsten Nash-Gleichgewichtes c_N^* zu den Kosten der global günstigsten Lösung c^* , also $\frac{c_N^*}{c^*}$.*

1.1 Preis der Stabilität

Um den Preis der Stabilität für das *Local Connection Game* zu analysieren, ist es hilfreich, zunächst die Eigenschaften der sozial optimalen Lösungen zu untersuchen. Dann lassen sich für verschiedene

Werte von α Nash-Gleichgewichte beschreiben und der Preis der Stabilität beschränken.

Lemma 4. *Für $\alpha \geq 2$ ist jeder Sterngraph sozial optimal, für $\alpha \leq 2$ dagegen der vollständige Graph.*

Beweis. Sei $G(V, E)$ eine sozial optimale Lösung, also eine Lösung, die $\text{SC}(G)$ minimiert. Da G zusammenhängend sein muss, gilt $|E| \geq |V| - 1$.

Es gibt $|V|(|V| - 1)$ geordnete Paare von Spielern. Davon sind $2|E|$ direkt miteinander verbunden und die restlichen haben einen Abstand von mindestens 2, d.h.

$$\sum_{i \neq j} \text{dist}(i, j) \geq 1(2|E|) + 2(|V|(|V| - 1) - 2|E|)$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen und Vereinfachen

$$\text{SC}(G) \geq (\alpha - 2)|E| + 2|V|(|V| - 1)$$

Für jeden Sterngraphen und für jeden vollständigen Graphen gilt hier Gleichheit, weil dann die Abschätzung für den Abstand der nicht-inzidenten Paare exakt stimmt. Und da ein Sterngraph die Anzahl der Kanten minimiert, sind für $\alpha > 2$ der erste Summand und deshalb auch die sozialen Kosten minimal. Analog lässt sich folgern, dass für $\alpha < 2$ der vollständige Graph optimal ist. $\square$

Lemma 5. *Für $\alpha \geq 1$ ist der Sterngraph und für $\alpha \leq 1$ der vollständige Graph ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Zunächst betrachten wir den Sterngraphen, bei dem der Spieler in der Mitte alle Kanten kauft und den Fall $\alpha \geq 1$. Wenn es sich für keinen Spieler lohnt, seine Strategie zu wechseln, ist der erste Teil des Lemmas bewiesen.

Für den mittleren Spieler lohnt es sich nicht, seine Strategie zu wechseln, da sonst ein nicht zusammenhängender Graph und damit unendlich hohe Kosten entstehen.

Jeder andere Spieler kann seine Strategie nur durch den Kauf zusätzlicher Kanten zu anderen Spielern ändern. Kauft er k Kanten, so steigen seine Kosten zwar um αk , jedoch verringert sich die Distanz durch jede dieser Kanten um 1, also insgesamt um k . Da aber $\alpha k \leq k$ ist, ist diese Lösung ein Nash-Gleichgewicht.

Für den Fall $\alpha \leq 1$ mit einem vollständigen Graphen als Lösung kann ein Spieler seine Strategie nur ändern, indem er Kanten rauswirft. Dann spart er zwar $\alpha k \leq k$, verliert aber wegen der größeren Distanz k an Nutzen. $\square$

Nun lässt sich der Preis der Stabilität beschränken. Für $\alpha \geq 2$ oder $\alpha \leq 1$ ergibt sich direkt aus **Lemma 4** und **Lemma 5** ein Preis der Stabilität von 1. Durch Anwenden der Schranke aus **Lemma 4**, lässt sich außerdem noch folgender Satz zeigen.

Satz 6. *Für $1 < \alpha < 2$ ist der Preis der Stabilität höchstens $\frac{4}{3}$.*

Der genaue Beweis enthält keine Überraschungen und wird deshalb weggelassen.

1.2 Preis der Anarchie

Für $\alpha < 1$ ist der vollständige Graph das einzige Nash-Gleichgewicht, folglich ist der Preis der Anarchie 1.

Das ist nicht schwer zu erkennen: Gäbe es nämlich ein anderes Nash-Gleichgewicht, könnte jeder Spieler durch den Kauf zusätzlicher Kanten seine Kosten verringern

Lemma 7. *Hat ein Graph $G(V, E)$ den Durchmesser d , dann ist $SC(G)$ höchstens $O(d)$ mal so hoch wie die minimalen Kosten.*

Beweis. Ein optimaler Graph $G^*(V, E^*)$ muss zusammenhängend sein und eine Distanz zwischen zwei Knoten von mindestens 1 aufweisen. Deshalb ist $SC(G^*) = \Omega(\alpha|V| + |V|^2)$. Die Kosten durch die Distanz in G sind höchstens $d|V|^2$ und damit höchstens d mal so hoch wie in G^* .

Nun betrachten wir die Kosten, die durch den Kauf der Kanten entstehen. Dazu unterscheiden wir zwischen Nicht-Schnittkanten und Schnittkanten, durch deren Entfernung mehrere Zusammenhangskomponenten entstünden.

Es gibt höchstens $|V| - 1$ Schnittkanten, die maximal $\alpha(|V| - 1)$ kosten.

Für einen Knoten i und für jede Kante ij , die von i bezahlt wird, sei V_{ij} die Menge aller Knoten k , bei denen der kürzeste Pfad von i nach k durch die Kante ij geht. Der Abstand von i zu j in $G \setminus ij$ ist höchstens $2d$. Denn der neue Pfad muss irgendwann in die Menge V_{ij} eintreten. Bis zum letzten Knoten u dieses Pfades, der nicht in V_{ij} ist, ist der Abstand von i zu u höchstens der ursprüngliche Durchmesser d , da der kürzeste Pfad zwischen diesen Knoten sich in $G \setminus ij$ nicht geändert hat. Der übrige Teil des Pfades ist ebenfalls höchstens d lang, weil der kürzeste Pfad aller Knoten aus V_{ij} zu i die Kante ij enthielt, bevor sie entfernt wurde, und deshalb der Durchmesser von $G[V_{ij}]$ höchstens $d - 1$ ist.

Daraus folgt, dass sich durch das Löschen einer Nicht-Schnittkante ij die Distanz von i zu allen anderen Knoten um höchstens $2d|V_{ij}|$ erhöhen. Weil G stabil ist, gilt

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 2d|V_{ij}| \\ \Leftrightarrow |V_{ij}| &\geq \frac{\alpha}{2d} \end{aligned}$$

Dann kann es für jeden Knoten i aber höchstens $|V| / (\frac{\alpha}{2d}) = \frac{2d|V|}{\alpha}$ solcher Kanten mit Kosten $O(d|V|)$ geben. Also sind die Gesamtkosten für alle Nicht-Schnittkanten $O(d|V|^2)$. Alles zusammengekommen ergibt das gewünschte Ergebnis

$$SC(G) = O(\alpha|V| + d|V|^2)$$

□

Mithilfe dieses Lemmas lässt sich der Preis der Anarchie beschränken.

Satz 8. *Der Durchmesser eines Nash-Gleichgewichtes G ist höchstens $2\sqrt{\alpha}$. Zusammen mit **Lemma 7** ergibt sich ein Preis der Anarchie von $O(\sqrt{\alpha})$.*

Beweis. Angenommen es gilt $\text{dist}(i, j) \geq 2k$ für die zwei Knoten i und j . Dann könnte Knoten i durch den Kauf der Kante ij den Abstand zu den Knoten auf der zweiten Hälfte des kürzesten Pfades P_{ij} verbessern. Dabei wird $\text{dist}(i, j)$ um $2k - 1$ besser, der Abstand zum letzten Knoten des Pfades P vor j um $2k - 3$, zum Vorletzten um $2k - 5$ und so weiter. Da der halbe Pfad k Knoten hat, verbessert sich der Abstand insgesamt um

$$2k^2 - \sum_{i=1}^k (2i - 1) = 2k^2 - k^2 = k^2$$

Wenn also $\text{dist}(i, j) > 2\sqrt{\alpha}$ ist, kann Spieler i sich verbessern, indem er die Kante ij hinzufügt. Dann wäre G aber kein Nash-Gleichgewicht. $\square$

Es lässt sich durch eine bessere Schranke für den Durchmesser von G auch folgende Schranke zeigen:

Satz 9. *Der Preis der Anarchie ist $O(1)$ wenn $\alpha = O(\sqrt{|V|})$ oder allgemeiner ausgedrückt ist er $O\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{|V|}}\right)$.*

Der Beweis wird hier übersprungen.

2 Global Connection Game

Im *Global Connection Game* kann ein Spieler nicht nur Kanten kaufen, die inzident zu ihm sind, sondern jede beliebige Kante, die er benötigt, um seine Terminals zu verbinden. Im Gegensatz zum *Local Connection Game* teilen sich die Spieler die Kosten der Kanten.

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G(V, E)$ mit nicht-negativen Kosten c_e für jede Kante e . Es gibt k Spieler und jeder Spieler i hat eine Quelle $s_i \in V$ und eine Senke $t_i \in V$. Das Ziel des Spielers i ist es, ein Netzwerk zu bauen, bei dem ein Pfad von s_i nach t_i existiert und dessen Kosten minimal sind. Eine Strategie für Spieler i ist also ein Pfad P_i von s_i nach t_i in G . Das aus dem Spiel resultierende Netzwerk ist $\bigcup_{i \in [k]} P_i$.

Sei k_e die Anzahl der Spieler, deren Pfad e enthält, und $S = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ ein reiner Strategievektor. Dann bezeichnet $\text{cost}_i(S)$ die Kosten für Spieler i unter der Strategie S , wobei

$$\text{cost}_i(S) = \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e}$$

Damit ergeben die Gesamtkosten für ein Netzwerk genau die Summe der Kosten aller Spieler. Es gibt Worst-Case-Beispiele von Graphen, bei denen der Preis der Anarchie k ist und welche, bei denen der Preis der Stabilität H_k ist, die k -te harmonische Zahl.

Satz 10. *Der Preis der Anarchie kann niemals größer als k sein.*

Beweis. Angenommen, es gibt einen Graphen, bei dem der Preis der Anarchie größer ist als k . Dann hat dieser Graph ein Nash-Gleichgewicht S mit Kosten $c + \epsilon$ und eine optimale Lösung S^* mit Kosten $\frac{c}{k}$. In S zahlt ein Spieler durchschnittlich $\frac{c+\epsilon}{k}$. Nach Schubfachprinzip gibt es also mindestens

einen Spieler i der mindestens $\frac{c+\epsilon}{k}$ zahlt. Für Spieler i lohnt sich dann aber in jedem Fall, auf seine alternative Strategie aus S^* auszuweichen, da er dann $\frac{\epsilon}{k}$ an Kosten spart, selbst wenn er alle Kanten alleine zahlen muss. $\square$

2.1 Potentialspiele

Ein Spiel das eine Potentialfunktion besitzt ist ein Potentialspiel.

Definition 11 (Potentialfunktion). Seien $S = (S_1, \dots, S_i, \dots, S_k)$ und $S' = (S_1, \dots, S'_i, \dots, S_k)$ zwei alternative Strategievektoren für ein endliches Spiel, in denen nur Spieler i eine unterschiedliche Strategie hat, und sei $u_i(S)$ der Nutzen von Spieler i für den Strategievektor S . Dann ist Φ eine Potentialfunktion, wenn sie jedem Strategievektor S einen reellen Wert zuweist und die Eigenschaft

$$\Phi(S) - \Phi(S') = u_i(S') - u_i(S)$$

erfüllt.

Anders ausgedrückt verringert sich die Potentialfunktion bei einem Strategiewechsel von Spieler i um genau den Wert, den Spieler i dadurch spart. Nun zurück zum *Global Connection Game*.

Lemma 12. Für jede Kante e sei $\Psi_e(S) = c_e H_{k_e}$. Dann ist die Funktion

$$\Psi(S) = \sum_e \Psi_e(S)$$

eine Potentialfunktion für das *Global Connection Game* und dieses damit ein Potentialspiel.

Beweis. Sei S ein Strategievektor, bei dem Spieler i Strategie P_i hat, und S' der Strategievektor, bei dem Spieler i Strategie P'_i hat, der aber sonst identisch zu S ist.

Für jede Kante e in P_i , die nicht in P'_i ist, spart Spieler i durch einen Strategiewechsel $\frac{c_e}{k_e}$, ändert also auch seinen Nutzen um diesen Wert, welcher exakt $\Psi_e(S) - \Psi_e(S')$ entspricht, denn

$$\Psi_e(S) - \Psi_e(S') = c_e \sum_{i=1}^{k_e} \frac{1}{k_e} - c_e \sum_{i=1}^{k_e-1} \frac{1}{k_e} = \frac{c_e}{k_e}$$

Analog zahlt Spieler i für jede Kante e in P'_i , die nicht in P_i ist, durch den Strategiewechsel $\frac{c_e}{k_e+1}$ mehr, sein Nutzen sinkt somit um exakt $\Psi_e(S') - \Psi_e(S)$ bzw. ändert sich um $\Psi_e(S) - \Psi_e(S')$.

Da $\Psi(S)$ die Summe der $\Psi_e(S)$ ist, ergibt sich wie gewünscht

$$\Psi(S) - \Psi(S') = u_i(S') - u_i(S)$$

denn $u_i(S') - u_i(S)$ ist die Gesamtänderung des Nutzens. $\square$

Satz 13. Die reine Strategie S , die Φ minimiert, ist ein reines Nash-Gleichgewicht für das Potentialspiel.

Beweis. Sei S ein reiner Strategievектор für ein Potentialspiel, der Φ minimiert und S' der Strategievектор, der durch einen Strategiewechsel von Spieler i aus S entsteht. Nach Annahme ist $\Phi(S') \geq \Phi(S)$ und weil Φ eine Potentialfunktion ist, ist die Nutzensteigerung von Spieler i damit negativ. $\square$

Folgerung 14. *Für jedes endliche Potentialspiel, also auch das Global Connection Game, konvergiert Best Response Dynamik, also lokale Suche auf der Potentialfunktion, gegen ein Nash-Gleichgewicht.*

Satz 15. *Der Preis der Stabilität ist für jedes Potentialspiel mit Potentialfunktion Φ höchstens $A \cdot B$, für beliebige Konstanten A und B , wenn*

$$\frac{\text{cost}(S)}{A} \leq \Phi(S) \leq B \text{cost}(S)$$

gilt.

Beweis. Sei S der Strategievектор, der $\Phi(S)$ über allen Strategievекtoren minimiert. Durch **Theorem 13** wissen wir, dass S ein reines Nash-Gleichgewicht ist. Sei S^* der Strategievектор mit den geringsten Kosten. Nach der ersten Ungleichung der Annahme gilt

$$\frac{\text{cost}(S)}{A} \leq \Phi(S)$$

und weil S Φ minimiert, gilt

$$\Phi(S) \leq \Phi(S^*)$$

Des Weiteren ergibt die zweite Ungleichung der Annahme

$$\Phi(S^*) \leq B \text{cost}(S^*)$$

Setzt man die Ungleichungen zusammen, folgt

$$\begin{aligned} \frac{\text{cost}(S)}{A} &\leq B \cdot \text{cost}(S^*) \\ \Leftrightarrow \text{cost}(S) &\leq AB \cdot \text{cost}(S^*) \end{aligned}$$

$\square$

Intuitiv heißt das, wenn wir eine Potentialfunktion finden können, die nah an der Kostenfunktion verläuft, dann ist der Preis der Stabilität klein.

Beobachtung 16. $\Psi_e(S)$ ist mindestens c_e und höchstens $c_e H_k$, da jede Kante im ausgewählten Netzwerk von mindestens einem und höchstens von allen Spielern benutzt wird. Deshalb gilt

$$\text{cost}(S) \leq \Psi(S) \leq H_k \text{cost}(S)$$

Folgerung 17. *Im Global Connection Game ist der Preis der Stabilität höchstens H_k , die k -te harmonische Zahl.*

Diese Methode, den Preis der Stabilität zu beschränken, nennt man *Potentialfunktionsmethode*. Die allgemeinen Eigenschaften von Potentialspielen sind sehr praktisch, denn es gibt noch einige andere interessante Spiele die in diese Klasse fallen.

Verwendete Literatur: Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, and Vijay V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007.