

Price of Anarchy

Max Wisniewski

Wolfgang Mulzer, Yannik Stein

1 Einzel Waren Märkte

Ein einzel Waren Markt ist ein Markt auf dem nur eine einzige beliebig teilbare Ware existiert zusammen mit einer Menge von R Nutzern dieser Ware. Die Ware wird durch die Menge $C > 0$ beschrieben. Jeder Nutzer r hat eine Funktion U_r für die Ware, die ihm für einen Teil der Menge d_r der Ware einen Gewinn zuweist.

Wir wollen nun einen Mechanismus (Verkäufer der Ware) finden, der den gemeinschaftlichen Gewinn maximiert und die Ware vollständig an die Nutzer verteilt. Dieser wird im folgenden Warenverwalter genannt. Nun müssen wir die Nutzenfunktionen zunächst etwas einschränken um darüber Aussagen zu treffen.

Annahme 1. Für alle Nutzer $r \in [R]$ ist die Nutzenfunktion $U_r(d_r)$ über $d_r \geq 0$ konkav, streng monoton steigend und stetig, sowie über $d_r > 0$ stetig differenzierbar. Darüber hinaus soll $U'(0) := \lim_{x \searrow 0} U'(x)$ endlich sein. Die Menge dieser Funktionen soll mit $\mathcal{U}$ bezeichnet werden.

Damit lässt sich das gewünschte Ziel formalisieren.

Definition 2. Sei $C > 0$, $R \in \mathbb{N}$ und $U_r \in \mathcal{U}$ für alle $r \in [R]$. Der Warenverwalter möchte das folgende Optimierungsproblem lösen.

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & \sum_r U_r(d_r) \\ \text{mit} & \sum_r d_r \leq C \\ & d_r \geq 0, \quad r \in [R] \end{array}$$

Wir nennen dieses Problem *SYSTEM*.

Da die (Ziel-)Funktion stetig ist und die Domäne kompakt ist, existiert ein Vektor $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_R)$, der das Problem löst.

Nun liegen dem Warenverwalter im Allgemeinen die Nutzenfunktionen nicht vor, deswegen modellieren wir ein Spiel zwischen Nutzern und Manager um das Problem zu lösen. Den relativen Unterschied der optimalen Lösung und einem Gleichgewicht eines Spiels zur Optimierung des Gewinns wird *Preis der Anarchie* genannt.

2 Der proportionale Vergabemechanismus

Der erste Mechanismus nimmt von jedem Nutzer ein Gebot entgegen und teilt die gesamte Ware dann proportional zu den gesamten Geboten auf.

Definition 3. Für $C > 0$ und $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$ legt der proportionale Vergabemechanismus (PBM) einen Preis

$$\mu = \frac{\sum_r w_r}{C}$$

fest und teilt jedem Nutzer $\mathbf{d} = \mathbf{w}/\mu$ an Ware zu, wobei er w_r von jedem Nutzer als Bezahlung nimmt.

Nun können wir zwei Arten von Spielen betrachten.

2.1 Preisnehmer Spiel

Ein Preisnehmer ist ein Marktteilnehmer, der keinen Einfluss auf den Preis der Ware hat. In unserem Fall hat zwar jeder Nutzer Einfluss auf den Preis, aber wir nehmen beim ersten Spiel an, dass sie von diesem Einfluss nichts wissen. Die einzelnen Nutzer haben einen Gewinn von

$$P_r(w_r, \mu) = U_r\left(\frac{w_r}{\mu}\right) - w_r$$

und streben danach diesen zu maximieren. Nun können wir ein Gleichgewicht für diese Situation definieren.

Definition 4. Ein wettbewerbsfähiges Gleichgewicht ist ein Tupel $(\mathbf{w}, \mu)$ wenn

$$P_r(w_r, \mu) \geq P_r(\bar{w}_r, \mu), \text{ für } r \in [R]$$

$$\mu = \frac{\sum_r w_r}{C}$$

gilt.

Satz 5. Es existiert ein wettbewerbsfähiges Gleichgewicht $(\mathbf{w}, \mu)$ und $\mathbf{d} = \mathbf{w}/\mu$ ist eine optimale Lösung für SYSTEM.

Wenn die Nutzer also reine Preisnehmer sind, kann der Warenverwalter die optimale Lösung finden. Der Preis der Anarchie ist in diesem Fall also gleich eins.

2.2 Preismanipulierende Nutzer Spiele

Der Unterschied zum vorhergehenden Abschnitt besteht darin, dass die Nutzer nun wissen, wie der Preis bestimmt wird und dies in ihre Überlegungen einzubeziehen. Die Nutzer haben einen Gewinn von

$$Q_r(w_r, \mathbf{w}_{-r}) = \begin{cases} U_r\left(\frac{w_r}{\sum_s w_s} C\right) - w_r & , \text{ falls } w_r > 0 \\ U_r(0) & , \text{ falls } w_r = 0 \end{cases}.$$

Da die Nutzer nun nicht mit dem Warenverwalter in Konkurrenz stehen – sondern mit den anderen Nutzern – brauchen wir eine andere Art von Gleichgewicht und hier bietet sich ein *Nash Gleichgewicht* an.

Definition 6. Ein Nash Gleichgewicht für das Spiel $(Q_1, \dots, Q_R)$ ist ein Vektor $\mathbf{w} \geq 0$, so dass für alle $r \in [R]$

$$Q_r(w_r, \mathbf{w}_{-r}) \geq Q_r(\bar{w}_r, \mathbf{w}_{-r}), \text{ für alle } \bar{w}_r \geq 0$$

gilt.

Für dieses Spiel und mindestens zwei Nutzer können wir nun zeigen, dass ein Gleichgewicht existiert.

Satz 7. Sei $R > 1$. Dann existiert ein Nash Gleichgewicht $\mathbf{w} \geq 0$ für das Spiel $(Q_1, \dots, Q_R)$ mit $\sum_r w_r > 0$. Für dieses $\mathbf{w}$ ist der Vektor $\mathbf{d}$, definiert durch

$$d_r := \frac{w_r}{\sum_s w_s} C$$

, für alle $r \in [R]$ eine eindeutige optimale Lösung für das Optimierungsproblem (SPIEL)

$$\begin{aligned} & \text{maximiere} \quad \sum_r \hat{U}_r(d_r) \\ & \text{mit} \quad \sum_r d_r \leq C, \\ & \quad d_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, R \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{U}_r(d_r) = \left(1 - \frac{d_r}{C}\right) U_r(d_r) + \left(\frac{d_r}{C}\right) \left(\frac{1}{d_r} \int_0^{d_r} U_r(z) dz\right)$$

ist.

Folgerung 8. Sei $R > 1$ und $\mathbf{w}$ das eindeutige Nash Gleichgewicht vom Spiel definiert durch $(Q_1, \dots, Q_R)$ und sein $\mathbf{d}$ wie in Theorem 7 definiert. Dann gilt für jeden Vektor $\bar{\mathbf{d}} \geq 0$ mit $\sum_r \bar{d}_r \leq C$

$$\sum_r \hat{U}'_r(d_r)(\bar{d}_r - d_r) \leq 0.$$

2.3 Der Preis der Anarchie

Nun wollen wir untersuchen um wie viel schlechter die Lösung ist, wenn die Nutzer preismanipulierend sind. Im folgenden bezeichnet $\mathbf{d}^S$ die optimale Lösung von SYSTEM und $\mathbf{d}^G$ die optimale Lösung von SPIEL.

Satz 9. Sei $R > 1$ und $U_r(0) \geq 0$ für alle $r \in [R]$. Wenn $\mathbf{d}^S$ eine beliebige optimale Lösung für SYSTEM und $\mathbf{d}^G$ beliebige optimale Lösung für SPIEL ist, dann gilt

$$\sum_r U_r(d_r^G) \geq \frac{3}{4} \sum_r U_r(d_r^S).$$

Die Schranke ist darüber hinaus scharf. D.h. für jede Wahl von $\varepsilon > 0$ gibt es eine Wahl von R und Nutzenfunktionen $U_1, \dots, U_R$, so dass

$$\sum_r U_r(d_r^G) \leq \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right) \left(\sum_r U_r(d_r^S)\right)$$

gilt.

Beweis. (Skizze)

Im Beweis wird die Konstante

$$\beta := \inf_{U \in \mathcal{U}} \left(\inf_{C > 0} \left(\inf_{0 \leq d, \bar{d} \leq C} \left[\frac{U(d) + \hat{U}'(d)(\bar{d} - d)}{U(\bar{d})} \right] \right) \right)$$

benötigt, die sich direkt nach unten auf $\frac{3}{4}$ abschätzen lässt. Mit dieser Konstante kann man nun

$$\sum_r U_r(d_r^S) \leq \sum_r \frac{1}{\beta} \left(U_r(d_r^G) + \hat{U}'_r(d_r^G)(d_r^S - d_r^G) \right) \leq \frac{1}{\beta} \sum_r U_r(d_r^G)$$

beweisen, da die erste Ungleichung per Definition von β gilt und die zweite aus Korollar 8 folgt.

Der Beweis, dass die Schranke scharf ist, lässt sich durch eine einfache Konstruktion angeben. $\square$

3 Glatte Markt leerende Mechanismen

Wir haben uns zunächst einen Mechanismus angesehen, der immer eine Menge proportional zum eigenen Gebot und zur Gesamtmenge der Gebote herausgibt. Als nächstes betrachten wir, ob dieser Mechanismus erwünscht ist. Das betrachtete Szenario erlaubt es den Nutzern immer noch nur ein Skalar (Gebot) an den Mechanismus zu schicken und dieser muss einen einheitlichen Preis für alle Nutzer festlegen.

Definition 10. Ein glatter Markt leerender Mechanismus ist eine differenzierbare Funktion $D : (0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, so dass für alle $C > 0$ und $R > 1$ und für alle $\theta \in (\mathbb{R}^+)^R$ eine eindeutige Lösung $p > 0$ für die Gleichung

$$\sum_r^R D(p, \theta_r) = C$$

existiert. Wir nennen diese Lösung $p_D(\theta)$.

Es ist leicht zu sehen, dass der proportionale Vergabemechanismus dieser Definition genügt mit $D(p, \theta) = \theta/p$. Um diese Mechanismen weiter zu untersuchen, erweitern wir die Definition von wettbewerbsfähigem und Nash Gleichgewicht.

Definition 11. Sei $(C, R, \mathbf{U})$ ein Markt und D ein glatter Markt leerender Mechanismus. Ein Vektor $\theta \in (\mathbb{R}^+)^R$ mit $\theta \neq 0$ ist

1. ein wettbewerbsfähiges Gleichgewicht, wenn mit $\mu = p_D(\theta)$ für alle $r \in [R]$

$$\theta_r \in \operatorname{argmax}_{\bar{\theta}_r \geq 0} [U_r(D(\mu, \bar{\theta}_r)) - \mu D(\mu, \bar{\theta}_r)]$$

gilt.

2. ein Nash Gleichgewicht, wenn für alle $r \in [R]$

$$\theta_r \in \operatorname{argmax}_{\bar{\theta}_r \geq 0} [Q_r(\bar{\theta}_r, \theta_{-r})]$$

gilt, wobei

$$Q_r(\theta_r, \theta_{-r}) = \begin{cases} U_r(D(p_D(\theta), \theta_r)) - p_D(\theta) D(p_D(\theta), \theta_r) & , \text{falls } \theta \neq 0 \\ -\infty & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir schränken nun die betrachteten Mechanismen noch etwas weiter ein.

Definition 12. Die Klasse $\mathcal{D}$ besteht aus allen Funktionen D mit

1. D ist ein glatter Markt leerender Mechanismus.
2. Für alle $C > 0$ und $U_r \in \mathcal{U}$ ist die Gewinnfunktion konkav, wenn der Nutzer preismanipulierend ist.
3. Für alle $p > 0$ und $d \geq 0$ existiert ein $\theta > 0$, so dass $D(p, \theta) = d$.
4. Die Zuweisungsfunktion ist nicht negativ, also für alle $p > 0$ und $\theta \geq 0$ ist $D(p, \theta) \geq 0$.

Nun können wir den Preis der Anarchie für diese Klasse von Mechanismen beschreiben. Dafür sei

$$\rho(D) = \inf \left\{ \frac{\sum_r U_r(D(p_D(\theta), \theta_r))}{\sum_r U_r(d_r)} \mid C > 0, R > 1, U \in \mathcal{U}^R \right\}$$

wobei $\mathbf{d}$ eine optimale Lösung für SYSTEM ist und θ ein Nash Gleichgewicht für das Spiel.

Satz 13. *Sei $D \in \mathcal{D}$ ein Mechanismus, dann gilt*

1. *Es existiert ein wettbewerbsfähiges Gleichgewicht θ . Darüber hinaus gilt, dass $\mathbf{d}$ mit $d_r = D(p_d(\theta), \theta_r)$ SYSTEM.*
2. *Es existiert eine konkave, streng monoton wachsende, differenzierbare und invertierbare Funktion $B : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, so dass für alle $p > 0$ und $\theta \geq 0$*

$$D(p, \theta) = \frac{\theta}{B(p)}$$

gilt.

3. *$\rho(D) \leq \frac{3}{4}$ und die Schranke wird mit Gleichheit angenommen, wenn $D(p, \theta) = \Delta\theta/p$ für ein $\Delta > 0$.*

Aus dem zweiten Punkt können wir schnell sehen, dass nach Aufsummierung für alle $r \in [R]$

$$B(p_D(\theta)) = \frac{\sum_r \theta_r}{C}$$

folgt und demnach

$$D(p_d(\theta), \theta_r) = \frac{\theta_r}{\sum_s \theta_s} C$$

gilt. Also wird jeder Mechanismus den Nutzern die Ware proportional zu ihrem Gebot zuordnen.

Aus dem letzten Punkt folgt, dass der Mechanismus am besten arbeitet, wenn die Preise auch proportional vergeben sind. In diesem Sinne ist der proportionale Vergabemechanismus schon optimal für die Klasse $\mathcal{D}$ gewesen.

4 Vickery-Clarke-Groves Ansatz

Bis hierhin haben wir angenommen, dass ein einheitlicher Preis für alle Nutzer festgelegt wurde. Nun betrachten wir, was passiert, wenn der Warenverwalter für jeden Nutzer einen eigenen Preis festlegen darf. Darüber hinaus geben die Nutzer kein Gebot mehr ab, sondern teilen dem Warenverwalter eine Nutzenfunktion mit.

Für einen Vektor $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_R)$ können wir den effektiven Nutzen als

$$\tilde{U}_r(d_r) - t_r(\tilde{\mathbf{U}})$$

beschreiben, wobei t_r der Preis ist, den der Warenverwalter für den Nutzer r festlegt. Der Preis wird durch die Definition der folgenden Mechanismen festgelegt.

Definition 14. *Ein Mechanismus $(f, t_1, \dots, t_n)$ heißt Vickery-Clarke-Groves (VCG) Mechanismus und Nutzenfunktionsmengen $V_1, \dots, V_n$ gilt*

1. $f(v_1, \dots, v_n) \in \operatorname{argmax}_{a \in A} \sum_i v_i(a)$; die Vergabefunktion maximiert den sozialen Gewinn.
2. Es existieren Funktionen $h_1, \dots, h_n$ mit $h_i : V_{-i} \rightarrow \mathcal{R}$, so dass für alle $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$:
 $t_i(v_1, \dots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_n))$

Auf unsere Situation umgesetzt ist f die Funktion, die uns eine Verteilung der Ware auf die Nutzer angibt und t_i sind die einzelnen Bezahlungsfunktionen. In unserem Fall sind die Bezahlungsfunktionen

$$t_r(\tilde{\mathbf{U}}) = - \sum_{s \neq r} \tilde{U}_s(d_s(\tilde{\mathbf{U}})) + h_r(\tilde{\mathbf{U}}_{-r}),$$

wobei die h_r beliebig sind.

Annahme 15.

1. Für alle $\theta > 0$ gehört die Funktion $\bar{U}(\cdot, \theta) : d \mapsto \bar{U}(d, \theta)$ zu $\mathcal{U}$ und ist echt konkav.
2. Für alle $\gamma \in (0, \infty)$ und $d \geq 0$ existiert ein $\theta > 0$, so dass $\bar{U}'(d, \theta) = \gamma$.

Für diese Angaben können wir wieder das Nash Gleichgewicht definieren.

Lemma 16. Ein Vektor θ ist ein Nash Gleichgewicht für einen skalaren VCG Mechanismus, g.d.w.

$$\mathbf{d}(\theta) \in \operatorname{argmax}_{d \in \{d \geq 0 : \sum_r d_r \leq C\}} \left(U_r(d_r) + \sum_{s \neq r} \bar{U}(d_s, \theta_s) \right)$$

Daraus können wir dann die folgende Ergebnisse herleiten.

Folgerung 17. Für einen skalaren VCG Mechanismus existiert ein Nash Gleichgewicht θ wie folgt konstruiert:

Sei d^S die optimale Lösung für SYSTEM. Dann wählt jeder Nutzer θ_r , so dass $\bar{U}'(d_r^S, \theta_r) = U'_r(d^S)$. Für diesen Vektor gilt $\mathbf{d}(\theta) = d^S$.

Satz 18. Seien die Nutzenfunktion gegeben mit $U'_r(0) = \infty$ für alle r und sei θ ein Nash Gleichgewicht. Dann ist $\mathbf{d}(\theta)$ eine optimale Lösung für SYSTEM.

Wir sehen also, dass in einem einzel Waren Markt mit *aktiven* Nutzern – die egoistisch handeln – immer eine optimale Lösung angenommen werden kann.

Literatur

- [1] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani *Algorithmic Game Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007.