Seminar über Algorithmen 11.02.2014

Evolutionäre Spiele

Julian Ritter *Wolfgang Mulzer, Yannik Stein*

1 Idee

- Motivation aus der Natur:
  Interesse der theoretischen Biologie an einer Bevölkerung, die um Ressourcen wetteifert und so untereinander interagiert

- Spieler:
  unendlich viele Spieler, die paarweise in einem symmetrischen 2-Personen-Spiel aufeinander treffen. Wir betrachten nur eine einzige Instanz des Spiels und schließen daraus auf die Fortentwicklung der Bevölkerung

- Zwei Modelle der Evolution:

  1. Reproduktion
     Ein Spieler mit höherer Auszahlung zieht aus den Spielen eine höhere Fitness und kann sich deshalb besser fortpflanzen als sein Gegenüber. Er vererbt dabei seine Strategie an seine Nachkommen und der Anteil der Spieler dieser Strategie im Spiel steigt
  2. Imitation
     Ein Spieler mit niedrigerer Auszahlung entschließt sich dazu, fortan die Strategie seines Gegenübers zu übernehmen. Auch auf diese Weise steigt der Anteil der Spieler mit der erfolgreichen Strategie

- Zentraler Untersuchungsgegenstand:
  Strategien für die Bevölkerung, die „stabil“ sind, d.h., die nicht durch Aufkommen einer neuen Strategie geschlagen und früher oder später ausgerottet werden können

In diesem Vortrag wird zunächst das klassische, reproduktive Modell eines evolutionären Spiels beschrieben und anhand eines Beispiels verdeutlicht. Danach wird das Konzept des Gleichgewichts in dieser Art von Spielen genauer betrachtet und die Komplexität, ein solches zu finden, ermittelt. Anschließend wird ein Modell vorgestellt, in dem die Evolution durch Imitation erfolgt. Zuletzt wird das klassische Modell erweitert, zusätzliche Bedingungen eingeführt und deren Auswirkungen untersucht.

2 Klassisches Modell

Im klassischen Modell, das wir zunächst betrachten, agieren die Spieler zufällig miteinander, d.h. der Gegenspieler wird gleichverteilt zufällig ausgewählt. Die Evolution erfolgt durch Reproduktion. Es gibt zwei Strategien: zum einen die vorherrschende Strategie, die von den meisten Spielern gespielt wird, zum anderen die Strategie der Mutanten, einer zahlenmäßig unterlegenen Gruppe. Die vorherrschende Strategie ist stabil, wenn ihre Anwender eine höhere Fitness als eine kleine Anzahl von Mutanten erhalten. Das heißt, dass sie sich stärker reproduzieren können und der Anteil der Mutanten dadurch geringer wird: die Mutanten sterben wieder aus. Grundziel bei diesem Modell ist es, eine evolutionsstabile Strategie (ESS) zu finden.

2.1 Definitionen

Die Auszahlung des Spiels wird dargestellt durch die Fitness-Funktion F. Wenn S die Menge der möglichen reinen Strategien und $\Delta(S)$ die Menge aller gemischten Strategien bezeichnet, ermittelt $F : \Delta(S) \times \Delta(S) \to \mathbb{R}$ die Auszahlung. Spielt also ein Spieler mit der gemischen Strategie s gegen einen anderen mit der Strategie t, so ist seine Auszahlung F(s,t), die Auszahlung seines Gegners entsprechend F(t,s).

Wir beziffern den Anteil der *Mutanten* an der Gesamtbevölkerung mit ε, den Anteil der Verfechter der vorherrschenden Strategie s (nennen wir sie die *Platzhirsche*) entsprechend mit $(1-\varepsilon)$. Wir nennen die Strategie der Mutanten t. Die Strategie s ist genau dann evolutionsstabil, wenn ihre Anwender eine höhere erwartete Fitness haben als die Mutanten, für alle möglichen mutierten Strategien $t \neq s$ und genügend kleines ε. Da wir nun die Verteilung der Strategien kennen, können wir folgendermaßen definieren:

Definition 1. *In einem symmetrischen 2-Personen-Spiel mit Fitness-Funktion F ist die Strategie s evolutionsstabil (ESS), wenn es für jede Mutantenstrategie $t \neq s$ ein ε_t gibt, sodass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_t$ gilt:*

$$(1-\varepsilon)F(s,s) + \varepsilon F(s,t) > (1-\varepsilon)F(t,s) + \varepsilon F(t,t).$$

Lemma 2. *In einem symmetrischen 2-Personen-Spiel mit Fitness-Funktion F ist die Strategie s evolutionsstabil (ESS), genau dann wenn beide folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *(s,s) ist ein Nash-Gleichgewicht*
2. *Für jede Bestantwort t auf s mit $t \neq s$ gilt: $F(s,t) > F(t,t)$.*

2.2 Spiel: Zwei Vögel

Das folgende Spiel modelliert das Verhalten zweier Vögel im Wettstreit um Nahrung.

	aggressiv	friedlich
aggressiv	$\frac{N-V}{2}$	N
friedlich	0	$\frac{N}{2}$

Beobachtung 3. *Das Spiel hat die folgenden ESS als Lösung:*

- *Für $N \geq V$ ist die reine Strategie **aggressiv** eine ESS.*
- *Für $N \leq V$ ist die gemischte Strategie $(\frac{N}{V}, 1-\frac{N}{V})$ eine ESS.*

Interessant ist dabei insbesondere der Fall $N = V$: Die aggressive Strategie ist evolutionsstabil, obwohl so beide Spieler die Auszahlung 0 erhalten. Würden beide immer friedlich spielen, erhielten sie die Auszahlung $\frac{N}{2}$. Diese Differenz ist in diesem Spiel der Preis der Anarchie.

3 Komplexität evolutionärer Spiele

Um die Komplexität des Lösens zu ermitteln, lässt sich zeigen, dass sich die Berechnung eines Parameters des Graphen (der maximalen Größe einer Clique) auf das Lösen bestimmter Spiele reduzieren lässt. Dabei konstruiert man ein Spiel aus einem Graphen heraus und untersucht den Zusammenhang zwischen diesem Parameter und den ESS des konstruierten Spiels. Da sich zeigen lässt, dass diese Eigenschaften genau miteinander korrespondieren, kann man die Suche nach dem Wert des Graphenparameters als Suche nach einer ESS umformulieren. Die Komplexität dieses Problems ist aber bekannt, somit ist so auch die Komplexität der ESS-Suche ermittelt.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir sowohl das konstruierte Spiel als auch die Matrix, in der die Ergebnisse für die reinen Strategien eingetragen sind, mit F. Dabei soll im Folgenden

$F(x, y)$ den Eintrag in der x-ten Zeile und y-ten Spalte der Matrix bezeichenen, falls x und y natürliche Zahlen sind und die Auszahlung $F(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_i y_j F(i, j)$, falls x und y als Vektoren gemischte Strategien bezeichnen.

3.1 Konstruktion eines Spiels aus einem Graphen

Sei ein Graph $G = (V, E), |V| = n$ gegeben.
Aus dem Graphen konstruiert man eine $(n + 1) \times (n + 1)$-Matrix F mit Einträgen $F(i, j)_{i,j=0}^{n}$:

$0 \leq i \leq n:$	$F(0, i) = F(i, 0) = 1 - 1/(2k)$	*(Reihe 0 und Spalte 0)*
$1 \leq i \leq n:$	$F(i, i) = \frac{1}{2}$	*(Diagonaleinträge)*
$1 \leq i \neq j \leq n:$	Falls $(i, j) \in E, F(i, j) = 1$, sonst $F(i, j) = 0$	*(der ganze Rest)*

3.2 Korrespondenzen zwischen größter Clique und ESS

Es wird sich zeigen, dass zwischen der maximalen Größe einer Clique im Graphen G und der Existenz einer ESS im Spiel F ein enger Zusammenhang besteht. Dieser wird über mehrere Lemmata Schritt für Schritt dargelegt werden. Im Folgenden bezeichne M die Größe (Anzahl der Knoten) der größten Clique in G.

Lemma 4. *Ist im o.g. Spiel s eine Strategie mit $s_0 = 0$, dann gilt $F(s, s) \leq 1-1/(2M)$. Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn s die Gleichverteilung über Strategien ist, deren korrespondierende Knoten in G eine Clique der Größe M bilden.*

Mit diesem Lemma als Handwerkszeug lassen sich nun mehrere Lemmata über den Zusammenhang zwischen den ESS und M, der Größe der größten Clique in G beweisen. Die Beweise bestehen jeweils aus der wiederholten Anwendung von Lemma 4 und der Defintionen von F und ESS.

Lemma 5. *Ist $M > k$ und C eine Clique maximaler Größe in G, dann ist die Gleichverteilung über C eine ESS.*

Lemma 6. *Ist $M < k$, dann ist die reine Strategie $s_0 = 1$ eine ESS.*

Lemma 7. *Ist $M \geq k$, dann ist die reine Strategie $s_0 = 1$ keine ESS.*

Lemma 8. *Ist $M \leq k$, dann kann keine Strategie s, die andere Strategien als s_0 verwendet, eine ESS sein.*

3.3 Konklusion

Satz 9. *In einem symmetrischen 2-Personen-Spiel F ist es sowohl NP- als auch Co-NP-schwer, zu überprüfen, ob F eine evolutionsstabile Strategie hat.*

Beweis. Dank Lemma 5 und 6 wissen wir, dass für $M \neq k$ eine ESS existiert, durch Lemma 7 und 8 wissen wir, dass für $M = k$ keine ESS existiert. Die Frage, ob F eine ESS hat, ist also äquivalent zur Frage, ob in G $M \neq k$ ist. Diese Frage ist nach einem Artikel von Papadimitriou und Yannakakis aus dem Jahr 1982 sowohl NP- als auch Co-NP-schwer zu beantworten. □

Satz 10. *In einem symmetrischen 2-Personen-Spiel F mit einer Strategie s ist es Co-NP-schwer, zu überprüfen, ob s eine evolutionsstabile Strategie ist.*

Beweis. Nimmt man Lemma 6 und 7 zusammen, erhält man die Aussage, dass die Strategie $s_0 = 1$ genau dann eine ESS ist, wenn $M < k$. Jeder Algorithmus, der überprüfen kann, ob eine beliebige Strategie evolutionsstabil ist, kann also auch bestimmen, ob $M < k$. Da bekannt ist, dass es Co-NP-schwer ist, zu bestimmen, ob in einem Graphen die größte Clique weniger als k Knoten hat, d.h. ob $M < k$, ist es also auch Co-NP-schwer, eine ESS zu überprüfen. □

Co-NP ist die Komplexitätsklasse derjenigen Probleme, deren komplementäres Problem in NP liegt. Beispielsweise liegt das Problem „Hat der Graph G einen Hamiltonkreis“ in NP und das Problem „Hat der Graph G keinen Hamiltonkreis“ in Co-NP.

Es existieren also bestimmte Spiele, für die, unter der Annahme dass $P \neq NP$, keine effizienten Algorithmen zum Auffinden einer ESS existieren. Da das Problem, eine ESS zu finden, so komplex ist, ist es unwahrscheinlich, dass eine endliche Bevölkerung mit einer einfachen Dynamik wie Reproduktion oder Imitation schnell gegen eine ESS konvergiert. Dieses Ergebnis hebt also hervor, wie wichtig die Unendlichkeit der Bevölkerung für effiziente Algorithmen bei evolutionären Spielen sein könnten. Wir werden im Folgenden sehen, dass wir mit ihrer Hilfe die Konvergenzgeschwindkeit eingrenzen können.

4 Imitatives Modell: Egoistisches Routing

Dieses Modell lässt Übereinstimmungen zu Transportnetzwerken erkennen, etwa zum Transport von Datenpaketen über ein Computernetzwerk oder zum Transport von Personen über ein Verkehrsnetzwerk. Charakteristisch für dieses Modell ist, dass die Evolution durch Imitation erreicht wird und dass unendlich viele sogenannte „Agenten“ mit unendlich kleinem Anteil am Gesamtfluss durch das Netzwerk am Spiel teilnehmen.

4.1 Das Routing-Modell

G	$= (V, E), V \ni s, t$	Quelle und Senke
x		Fluss, der die Quantität 1 von s nach t transportieren soll
P		Menge aller Pfade p von s nach t
x_p		Anteil des Flusses x, der über den Pfad $p \in P$ läuft.
x_e	$= \sum_{p \ni e} x_p$	Ladung einer Kante e
L_e:	$[0, 1] \to \mathbb{R}$	Latenzfunktionen für jede Kante $e \in E$, nicht-negativ, monoton steigend und Lipschitz-stetig
$L_p(x)$	$= \sum_{e \in p} L_e(x_e)$	gesamte Latenz eines Pfades im Fluss x
$L(x)$	$= \sum_{p \in P} x_p L_p(x)$	Latenz des Flusses x

Die Latenz des Flusses ist also die durchschnittliche Dauer des Transports jedes unendlich kleinen Teils des Flusses. Im Spiel sind unendlich viele Agenten, die jeweils einen unendlich geringen Teilbetrag der Gesamtmenge 1 transportieren. Ein Fluss x heißt zulässig, wenn $\sum_{p \in P} x_p = 1$. Jeder Agent soll zunächst eine zufällige reine Strategie spielen, also zufällig einen der Pfade in P benutzen. Dann wird jeder Agent zufällig einem anderen Agenten zugewiesen und die beiden vergleichen die Latenzen ihrer jeweiligen Pfade. Schließlich ändert der Agent mit der höheren Latenzzeit seine Strategie zur Strategie des anderen mit eine Wahrscheinlichkeit, die proportional zur Differenz der Latenzen ist. Dies entspricht auf der Ebene des Spiels einer Auszahlung, die den negativen Wert der erfahrenen Latenz entspricht, gepaart mit einer Durchsetzung der erfolgreicheren Strategie durch Imitation. In diesem Kontext erscheint es nur folgerichtig, eine dem Nash-Gleichgewicht ähnliche Idee einzuführen: einen Zustand, in dem keiner der Agenten mehr einen Anlass hat, seine Strategie zu ändern.

Definition 11. *Ein zulässiger Fluss x ist ein Nash-Fluss genau dann, wenn für alle $p, p' \in P$ mit $x_p > 0, L_p(x) \leq L_{p'}(x)$.*

4.2 Konvergenz im Routing-Modell

Die folgenden Ergebnisse können gewonnen werden, indem man das Problem ins Gebiet der Differenzialgleichungen überführt.

Beobachtung 12. *Wird im Routing-Modell mit dem Fluss x mit $x_p > 0$ für alle $p \in P$ begonnen, konvergiert der Fluss durch die Imitation gegen einen Nash-Fluss.*

Dieses Ergebnis gibt aber keinen Anhaltspunkt dafür, wie schnell der Fluss konvergiert und ist daher für den praktischen Einsatz wenig geeignet. Stattdessen definiert man ein „Fast-Gleichgewicht“, über das man solche Aussagen treffen kann:

Definition 13. *Sei $P_\varepsilon \subseteq P$ die Menge der Pfade mit einer Latenz $\geq (1+\varepsilon) * L(x)$, d.h. $P_\varepsilon = \{p \in P : L_p(x) \geq (1+\varepsilon)L(x)\}$. Sei außerdem $x_\varepsilon = \sum_{p \in P_\varepsilon} x_p$ der Anteil der Agenten, die diese Pfade nutzen.*

Ein Fluss x ist ein ε-Gleichgewicht $\Leftrightarrow x_\varepsilon \leq \varepsilon$.

Beobachtung 14. *Jeder zulässige Fluss x konvergiert innerhalb einer Zeit von $\mathcal{O}(\varepsilon^{-3} ln(\frac{max_p L_p(x)}{min_y L(y)}))$ gegen ein ε-Gleichgewicht.*

5 Unvollständige Interaktionsgraphen

Wir widmen uns wieder dem klassischen Modell, mit einem Unterschied: Während im klassischen Modell jedes Individuum gleichverteilt zufällig einen Gegenspieler zugewiesen bekommt, nehmen wir hier an, dass die Interaktionen sich auf diejenigen Paare beschränken, die in einem Graphen eine gemeinsame Kante haben.

5.1 Eigenschaften des Modells

Der grundlegende Unterschied zum klassischen Modell ist also, dass die Möglichkeit einer Interaktion zwischen zwei Individuen nicht mehr fest vorhanden ist, sondern von einem zusätzlichen Element des Spiels, einem Interaktionsgraphen, abhängt. Durch diese neue Einschränkung gehen gewisse Symmetrien des klassischen Modells verloren: War im klassischen Modell noch das Ergebnis jedes Individuums in einer festen Population ausschließlich von seiner Strategie abhängig, spielt jetzt auch die Position im Graphen eine entscheidende Rolle. Wohl und Wehe sind in diesem Modell entscheidend von der Nachbarschaft eines Individuums abhängig und welche Strategie ausstirbt und welche nicht, hängt für den einzelnen Spieler in hohem Maße vom Graphen ab. Daher muss die Fitness-Funktion F an die veränderten Gegebenheiten angepasst werden:

Definition 15. *Sei $G = (V, E)$ der Interaktionsgraph des Spiels und u ein Knoten des Graphen, der die Strategie s_u spielt. Dann ist die Fitness des Spielers u*

$$F(u) = \frac{\sum_{v \in N(u)} F(s_u, s_v)}{|N(u)|},$$

wobei $N(u) = \{v \in V : (u, v) \in E\}$ die Nachbarschaft von u in G bezeichnet.

Die Fitness des Spielers u entspricht also der erwarteten Fitness, wenn er gegen einen zufällig ausgewählten Nachbarn im Graphen spielt.

5.2 Unendlich große Graphen

Da Graphen endliche Gebilde sind, müssen wir, um weiterhin unendlich viele Spieler modellieren zu können, asymptotische Ergebnisse in Familien von Graphen erzielen. Dazu benötigen wir einige Definitionen. Zunächst definieren wir, wann wir sagen, dass eine Menge von Mutanten ausstirbt, da wir das alte Konzept der Unterlegenheit gegen die vorherrschende Strategie nicht ohne Weiteres übernehmen können. Die darauf folgende Definition ist hilfreich dabei, nur Mengen von Mutanten, die eine angemessene Größe haben, zu untersuchen.

Definition 16. *Sei* $G = \{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine unendliche Familie von Graphen, wobei* G_n n *Knoten habe. Sei* $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine beliebige Famile von Teilmengen der Knoten von* G_n*, sodass* $|M_n| \geq \varepsilon^{\star} n$ *für ein konstantes* $\varepsilon^{\star} > 0$*. Alle Knoten in* M_n *spielen die Mutantenstrategie t, die restlichen Knoten von* G_n *spielen die Platzhirschstrategie s. Sei außerdem* $\varepsilon' > 0$*.*

- M_n ***schrumpft****, falls für genügend großes n alle bis auf* $o(n)$ *der Knoten* $j \in M_n$ *einen Platzhirsch i als Nachbarn haben, für den* $F(j) < F(i)$ *gilt.*

- M_n *ist* ε'***-linear****, falls es ein* ε *mit* $\varepsilon' > \varepsilon > 0$ *gilt, sodass für genügend großes n gilt:* $\varepsilon' n > |M_n| > \varepsilon n$*.*

Mit diesen neuen Definitionen können wir eine Definition von evolutionsstabilen Strategien auch für unvollständige Interaktionsgraphen einführen:

Definition 17. *Sei* $G = \{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine unendliche Familie von Graphen, wobei* G_n n *Knoten habe. Sei F ein symmetrisches 2-Personen-Spiel und s eine Strategie für dieses Spiel.*

s ist eine ***ESS hinsichtlich F und G****, falls für alle Mutantenstrategien* $t \neq s$ *ein* $\varepsilon_t > 0$ *existiert, sodass für jede* ε_t*-lineare Famile von t spielenden Mutanten* $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *gilt, dass* M_n *für genügend großes n schrumpft.*

Um also einer Strategie s die Stabilität abzuerkennen, muss man eine Mutantenfamilie M finden, in der jedes M_n einen beliebig kleinen aber echt positiven Anteil an der Gesamtzahl von Knoten in G_n bildet und die nicht schrumpft, d.h. in der jede Mutantenmenge eine linear große Teilmenge hat, die bei keiner Interaktionen mit einem nicht-mutierten Nachbarn den Kürzeren zieht).

5.3 Spielen in Zufallsgraphen

Satz 18. *Sei F ein symmetrisches 2-Personen-Spiel und sei s eine ESS in F. Sei* $G = \{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine unendliche Graphenfamilie mit* $G_{n,p}$*-Graphen, wobei* $p = \Omega(1/n^c)$ *und* $0 \leq c < 1$*. Dann ist s mit Wahrscheinlichkeit 1 eine ESS hinsichtlich F und G.*

Dieses Ergebnis lässt sich folgendermaßen bewerten: Sobald die Kantendichte so hoch ist, dass in G ein gewisses Mindestmaß an Zusammenhang hergestellt ist, sind die ESS des klassischen Modells mit dem eines Interaktionsgraphen identisch: Die Konzepte sind also sehr ähnlich und es ist egal, ob im klassischen Modell ein zufälliger Gegenspieler ausgewählt wird, oder ob im Graphen-Modell die Kanten zu den Gegenspielern zufällig gesetzt werden.

6 Quellen

Suri,Siddharth: Computational Evolutionary Game Theory. In: Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani: Algorithmic Game Theory.