Satz 1 (Master-Theorem für teile-und-herrsche-Rekursionen).
Es seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten, und $f(n)$ und $T(n)$ seien positive Funktionen, die auf den natürlichen Zahlen definiert sind. Für die Konstante $n_0 \geq 1$ gelte die Rekursionsbeziehung

$$T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + f(n), \text{ für } n > n_0 \tag{1}$$
$$T(n) \geq aT(\lfloor n/b \rfloor) + f(n), \text{ für } n > n_0 \tag{2}$$

Dann definieren wir den Schwellenexponenten

$$\gamma := \log_b a \geq 0,$$

und für $T(n)$ gelten folgende asymptotische Schranken:

(−) *Wenn $f(n) = O(n^{\gamma-\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ ist, dann ist*

$$T(n) = \Theta(n^\gamma).$$

(=) *Wenn $f(n) = \Theta(n^\gamma)$ ist, dann ist*

$$T(n) = \Theta(n^\gamma \log n).$$

(+) *Wenn $f(n) = \Theta(n^{\gamma+\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ ist, oder wenn f die Regularitätsbedigung erfüllt:*

$$a \cdot f(\lceil n/b \rceil) \leq c \cdot f(n), \text{ für ein } c < 1 \text{ und für alle } n > n_0, \tag{3}$$

dann ist

$$T(n) = \Theta(f(n)).$$

Bemerkung. Falls f monoton ist, also $f(n+1) \geq f(n)$, gelten die Schlussfolgerungen auch für gemischtes Auf- und Abrunden, zum Beispiel für die Mergesort-Rekursion $T(n) = T(\lceil n/b \rceil) + T(\lfloor n/b \rfloor) + \Theta(n)$.

Beweis: Wir können im Beweis n_0 beliebig vergrößern, falls es nötig ist, denn die Voraussetzung wird ja dadurch nur abgeschwächt. Wir fordern also ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass $n_0/b \leq n_0 - 1$ ist. Dies stellt sicher, dass auf der rechten Seite der Rekursionen (1–2) die Funktion T auf einen echt kleineren Parameter angewendet wird als auf der linken Seite und T durch die Rekursion tatsächlich bestimmt wird.

Um $T(n)$ abzuschätzen, brauchen wir noch konkrete Anfangsbedingungen:

$$0 < T(n) \leq M, \text{ für } n \leq n_0 \tag{4}$$

Diese endlich vielen Bedingungen kann man einfach erfüllen, indem man M groß genug wählt.

(A) Obere Schranken im Fall $(-)$ und $(=)$, und im Unterfall von $(+)$, wo f durch $f(n) = O(n^{\gamma+\varepsilon})$ beschränkt ist.

Schritt 1. Ersetzen von f durch die Schranke.

Statt der Rekursion (1) mit der Funktion $f(n) = O(n^k)$ verwenden wir eine explizite obere Schranke $f(n) \leq u \cdot n^k$, für eine geeignete Konstante u. Unser Ziel ist die Bestimmung einer monoton wachsenden Funktion $\hat{T}(n)$, die die Bedingung

$$\hat{T}(n) \geq a\hat{T}(\lceil n/b \rceil) + u \cdot n^k, \text{ für } n > n_0 \tag{5}$$

$$\hat{T}(n) \geq M, \text{ für } n_0/b \leq n \leq n_0 \tag{6}$$

erfüllt. Durch vollständige Induktion ergibt sich dann leicht $T(n) \leq \hat{T}(n)$ für $n \geq n_0$. Der Induktionsschritt ist dabei die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq aT(\lceil n/b \rceil) + f(n) \\ &\leq a\hat{T}(\lceil n/b \rceil) + f(n) \\ &\leq a\hat{T}(\lceil n/b \rceil) + u \cdot n^k \\ &\leq \hat{T}(n) \end{aligned}$$

Wenn diese neue Funktion $\hat{T}(n)$ dann durch $O(n^\gamma)$, $O(n^k)$ oder $O(n^k \log n)$ beschänkt ist, so überträgt sich diese Schranke auch auf $T(n)$.

Schritt 2. Verschiebung des Definitionsbereichs, um das Aufrunden loszuwerden: Die passende Verschiebungskonstante $V := b/(b-1)$ ergibt sich aus der nachfolgenden Rechnung durch die Bedingung $-V/b = 1 - V$.
Behauptung: Wenn wir eine monoton wachsende Funktion T' finden können, die auf allen positiven reellen Zahlen definiert ist und die Gleichung

$$T'(n) = aT'(n/b) + u'n^k \tag{7}$$

für alle $n > n_0 - V$ mit einer geeignet zu bestimmenden Konstante u' erfüllt, dann erfüllt $\hat{T}(n) = T'(n - V)$ die Abschätzung (5).

Beweis der Behauptung:

$$\begin{aligned} \hat{T}(n) &= T'(n - V) \\ &= aT'((n - V)/b) + u'(n - V)^k \\ &= aT'(n/b + 1 - V) + u'(n - V)^k \\ &\geq aT'(\lceil n/b \rceil - V) + u'(n - V)^k \\ &= a\hat{T}(\lceil n/b \rceil) + u'(n - V)^k \end{aligned}$$

Um (5) zu erreichen, braucht die Konstante u' bloß so bestimmt zu werden, dass $u'(n-V)^k \geq u \cdot n^k$ für alle $n > n_0$ gilt. Durch Vergrößern von n_0 stellen wir zuerst sicher, dass $n_0 - V \geq 1$ ist, und wählen dann $u' := u(n_0/(n_0-V))^k$.

Schritt 3. Lösung der Gleichung. Es reicht also, die Gleichung (7) zu lösen, um eine obere Schranke für $T(n)$ zu bekommen. Die Lösung leicht man leicht durch einen Ansatz. Wir müssen die Fälle unterscheiden:

In den Fällen $(-)$ und $(+)$, wo $k = \gamma \pm \varepsilon$ ist, führt der Ansatz $T'(n) = Dn^\gamma + En^k$ zum Ziel: Einsetzen in (7) ergibt $E = u'/(1-b^{\gamma-k})$; der Parameter D wird hier noch nicht eingeschränkt.

Im Fall $(-)$ ist $k < \gamma$ und $E < 0$. Wir können aber D so groß wählen, dass die entstehende Funktion $\hat{T}(n) = D(n-V)^\gamma + E(n-V)^k$ monoton wachsend und für $n_0/b \leq n \leq n_0$ größer als M wird. Wir erhalten $T(n) \leq \hat{T}(n) = O(n^\gamma)$.

Im Fall $(+)$ ist $k > \gamma$ und $E > 0$. Auch hier können wir D groß genug wählen, dass die entstehende Funktion $\hat{T}(n) = D(n-V)^\gamma + E(n-V)^k$ für $n_0/b \leq n \leq n_0$ größer als M wird. Wir erhalten $T(n) \leq \hat{T}(n) = O(n^k)$.

Im Fall $(=)$, wo $k = \gamma$ ist, führt der Ansatz $T'(n) = Dn^\gamma + En^\gamma \log_b n$ zum Ziel: Um (7) zu erfüllen, müssen wir $E = u'$ setzen; den Parameter D können wir frei wählen, und wird machen ihn groß genug, dass die entstehende Funktion $\hat{T}(n) = D(n-V)^\gamma + E(n-V)^\gamma \log_b(n-V)$ für $n \leq n_0$ größer als M wird. Wir erhalten $T(n) \leq \hat{T}(n) = O(n^\gamma \log n)$.

Im Anhang A ist dieser Teil des Beweises noch einmal in allen Details ausgeführt (auf englisch).

(B) Untere Schranken im Fall $(-)$ und $(=)$. Dieser Beweis ist analog zu den oberen Schranken, nur die Richtung der Ungleichungen ändert sich, und die Verschiebungskonstante V wird nicht subtrahiert, sondern addiert.

Statt (5–6) muss $\hat{T}$ im Fall $(=)$ die Ungleichung

$$\hat{T}(n) \leq a\hat{T}(\lfloor n/b \rfloor) + u \cdot n^\gamma, \text{ für } n > n_0, \tag{5'}$$

erfüllen, und für die Anfangsbedingung brauchen wir die Ungleichung

$$\hat{T}(n) \leq T(n), \text{ für } n \leq n_0. \tag{6'}$$

Durch Verschieben des Parameterbereichs, diesmal mit der Formel $\hat{T}(n) = T'(n+V)$, wird die Ungleichung (5′) auf (7) zurückgeführt. Der Ansatz führt auf die Lösung $\hat{T}(n) = (D + u' \log_b(n+V))(n+V)^\gamma$, mit der der Induktionsschritt funktioniert. Wir setzen $D = 0$ und verkleinern u', sodass die endlich vielen Anfangsbedingungen (6′) erfüllt sind. Wir können u' beliebig verkleinern, denn diese Konstante kommt aus der Annahme, dass $f(n) \geq un^\gamma$ ist.

Der Beweis der unteren Schranke für den Fall $(-)$ ist besonders leicht, weil man einfach $f(n) = 0$ annehmen kann.

Im Anhang A sind diese Beweise ausgeführt.

(C) Der Fall $(+)$.

Die untere Schranke $T(n) \geq f(n)$ folgt trivialerweise aus (2). Für die obere Schranke brauchen wir nur mehr den Fall zu betrachten, dass die Regularitätsbedingung (3) gilt.

Wir beweisen mit Induktion nach n, dass

$$T(n) \leq D \cdot f(n) \tag{8}$$

für alle n und für eine geeignete Konstante D ist. Zunächst wählen wir die natürlich Zahl $n_1 > n_0$ groß genug, dass $\lceil n/b \rceil > n_0$ für $n > n_1$ ist. Die Funktion $f(n)$ ist nach Voraussetzung (3) positiv; wir können daher D groß genug wählen, dass (8) für alle $n \leq n_1$ erfüllt ist. Außerdem wählen wir D groß genug, dass $cD+1 \leq D$ ist, also $D \geq 1/(1-c)$. Als Induktionsbasis haben wir somit erreicht, dass (8) im Intervall $n \leq n_1$ gilt. Als Induktionsschritt betrachten wir eine Zahl $n > n_1$. Für $n > n_1$ gilt nach Voraussetzung $\lceil n/b \rceil \leq n - 1$, und daher können wir in der Rekursion die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq aT(\lceil n/b \rceil) + f(n) \\ &\leq aD \cdot f(\lceil n/b \rceil) + f(n) \qquad \text{(nach I.V.)} \\ &\leq cD \cdot f(n) + f(n) = (cD+1) \cdot f(n) \leq D \cdot f(n) \end{aligned}$$

Der Induktionsschluss war somit erfolgreich.

Der Fall $f(n) = \Theta(n^{\gamma+\varepsilon})$ für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ wurde schon in Teil (A) direkt behandelt. Als Fleißaufgabe zeigen wir, dass diesen Fall auch auf den Fall der Regularitätsbedingung zurückführen kann. Wir können $f(n)$ durch die Funktion $\tilde{f}(n) = u \cdot n^{\gamma+\varepsilon} > f(n)$ für eine passende Konstante u nach oben abschätzen. Wir werden zeigen, dass $\tilde{f}(n)$ die Regularitätsbedingung erfüllt. Wie können also das oben Bewiesene anwenden, wenn wir die Funktion $f(n)$ in der Rekursion (1) durch $\tilde{f}(n)$ ersetzen. Für die Funktion $\tilde{T}(n)$, die sich dann ergibt, erhalten wir $\tilde{T}(n) = O(\tilde{f}(n))$. Die Funktion $\tilde{T}(n)$ ist eine obere Schranke für $T(n)$, und somit ist

$$T(n) \leq \tilde{T}(n) = O(\tilde{f}(n)) = O(f(n)).$$

Wir müssen noch zeigen, dass die Funktion $\tilde{f}(n)$ die Regularitätsbedingung (3) erfüllt. Wenn wir das Aufrunden einfach ignorieren könnten, wäre die linke Seite von (3)

$$a \cdot \tilde{f}(n/b) = aun^{\gamma+\varepsilon}/b^{\gamma+\varepsilon} = un^{\gamma+\varepsilon}/b^{\varepsilon},$$

und die rechte Seite ist

$$c \cdot \tilde{f}(n) = c \cdot un^{\gamma+\varepsilon}.$$

Man könnte einfach $c = 1/b^\varepsilon < 1$ setzen. Durch das Aufrunden wird die linke Seite größer, aber wenn n groß genug ist, ist diese Änderung klein genug, sodass die linke Seite immer noch $< \tilde{f}(n)$ ist. In vorausschauender Vorhersehung vergrößern wir n_0 also gegebenenfall, sodass

$$(1 + \tfrac{b}{n})^{\gamma+\varepsilon} < b^\varepsilon$$

für alle $n > n_0$ ist. Wir definieren dann

$$c := (1 + \tfrac{b}{n_0})^{\gamma+\varepsilon} / b^\varepsilon < 1,$$

sodass für alle $n > n_0$ gilt:

$$(1 + \tfrac{b}{n})^{\gamma+\varepsilon} \leq cb^\varepsilon$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
a \cdot \tilde{f}(\lceil n/b \rceil) &= au \cdot \lceil n/b \rceil^{\gamma+\varepsilon} \\
&< au(n/b + 1)^{\gamma+\varepsilon} \\
&= au(1 + \tfrac{b}{n})^{\gamma+\varepsilon} / b^{\gamma+\varepsilon} \cdot n^{\gamma+\varepsilon} \\
&\leq au \cdot cb^\varepsilon / b^{\gamma+\varepsilon} \cdot n^{\gamma+\varepsilon} \\
&= cun^{\gamma+\varepsilon} \cdot a/b^\gamma \\
&= cun^{\gamma+\varepsilon} \\
&= c \cdot \tilde{f}(n),
\end{aligned}$$

für alle $n > n_0$, und somit erfüllt $\tilde{f}(n)$ die Regularitätsbedingung.

A Proof of Case (=)

This is one case of the "Master Theorem" for divide-and-conquer recurrences.

Theorem 1. *Let $a \geq 1$ and $b > 1$ be constants, and let $f(n)$ and $T(n)$ be nonnegative functions defined on the nonnegative integers. Let $\gamma := \log_b a > 0$, and let $n_0 \geq 1$ be some integer constant.*

(a) *Suppose we have the recurrence inequality*

$$T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + f(n), \text{ for all } n > n_0. \tag{9}$$

If $f(n) = O(n^\gamma)$, then

$$T(n) = O(n^\gamma \log n).$$

(b) *Suppose we have the recurrence inequality*

$$T(n) \geq aT(\lfloor n/b \rfloor) + f(n), \text{ for all } n > n_0. \tag{10}$$

If $f(n) = \Omega(n^\gamma)$, *then*

$$T(n) = \Omega(n^\gamma \log n).$$

(c) *If the recurrence* (10) *holds and* $T(n) > 0$ *for all* n, *then*

$$T(n) = \Omega(n^\gamma).$$

The proof will be given in the style proposed by E. W. Dijkstra[1], but without motivation or explanation.

Proof. (a) The upper bound. Set

$$V := b/(b-1). \tag{11}$$

By arithmetic manipulations, we can conclude that

$$-V/b = 1 - V. \tag{12}$$

If necessary, increase the integer threshold n_0 such that

$$n_0/b \geq V + 2 \tag{13}$$

and

$$n_0/b \leq n_0 - 1. \tag{14}$$

Increasing n_0 makes the assumption (9) weaker, and thus we can assume (13–14) without loss of generality. From the last inequality, we obtain

$$n/b \leq n - 1, \text{ for all } n \geq n_0. \tag{15}$$

Set

$$M := \max\{T(0), T(1), T(2), \ldots, T(n_0)\} \tag{16}$$

By the assumption $f(n) = O(n^\gamma)$, we can choose u such that

$$f(n) \leq u \cdot n^\gamma, \tag{17}$$

[1] Edsger W. Dijkstra. *The notational conventions I adopted, and why.* EWD1300, July 2000. `https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD13xx/EWD1300.html`

for all $n \geq 1$.

$$u' := \max\left\{u\left(\frac{n_0}{n_0 - V}\right)^\gamma, \frac{M}{(n_0/b - V)^\gamma \log_b(n_0/b - V)}\right\}, \tag{18}$$

which is well-defined and positive due to (13). It follows that

$$u \cdot n^\gamma \leq u' \cdot (n - V)^\gamma, \text{ for all } n \geq n_0 \tag{19}$$

We define the nonnegative function

$$\hat{T}(n) := u'(n - V)^\gamma \log_b(n - V) \tag{20}$$

for all real numbers $n \geq V + 1$. It is a product of two nonnegative increasing functions and is therefore monotone increasing. We claim that $\hat{T}(n)$ is an upper bound on $T(n)$:

$$T(n) \leq \hat{T}(n), \text{ for all integers } n \geq n_0/b \tag{21}$$

From this, the desired asymptotic bound $T(n) = O(n^\gamma \log n)$ follows immediately. Note that, by (13), the interval $[n_0/b, \infty)$ for n is contained in the domain $[V + 1, \infty)$ of $\hat{T}$, and therefore the inequality (21) makes sense.

As induction basis, we prove (21) for the range $n_0/b \leq n \leq n_0$ directly:

$\hat{T}(n)$
$\geq$ { $\hat{T}$ is monotone increasing }
$\hat{T}(n_0/b)$
$=$ { definition of $\hat{T}$ }
$u'(n_0/b - V)^\gamma \log_b(n_0/b - V)$
$\geq$ { second term in the definition (18) of u' }
M
$\geq$ { definition (16) of M, assumption $n \leq n_0$ }
$T(n)$

We are ready for the induction step to prove (21). We assume $n > n_0$, and the induction hypothesis is that $T(i) \leq \hat{T}(i)$ has been proved for all i in the range $n_0/b \leq i < n$.

$T(n)$
$\leq$ { recurrence (9) }
$aT(\lceil n/b \rceil) + f(n)$

$$
\begin{array}{ll}
\leq & \{\ \lceil n/b \rceil < n \text{ by (15)},\ \lceil n/b \rceil \geq n_0/b, \text{ induction hypothesis } \} \\
& a\hat{T}(\lceil n/b \rceil) + f(n) \\
\leq & \{\ \hat{T} \text{ is monotone } \} \\
& a\hat{T}(n/b+1) + f(n) \\
\leq & \{\ \text{definition (20) of } \hat{T}\ \} \\
& au'(n/b+1-V)^\gamma \log_b(n/b+1-V) + f(n) \\
\leq & \{\ (12)\ \} \\
& au'(n/b-V/b)^\gamma \log_b(n/b-V/b) + f(n) \\
= & \{\ \text{rearrangement } \} \\
& (a/b^\gamma)u'(n-V)^\gamma \log_b((n-V)/b) + f(n) \\
= & \{\ a = b^\gamma \text{ by the definition of } \gamma, \text{ laws of logarithms } \} \\
& u'(n-V)^\gamma \big(\log_b(n-V) - 1\big) + f(n) \\
\leq & \{\ f(n) = O(n^\gamma), \text{ condition (17) on } u\ \} \\
& u'(n-V)^\gamma \big(\log_b(n-V) - 1\big) + u \cdot n^\gamma \\
\leq & \{\ (19)\ \} \\
& u'(n-V)^\gamma \big(\log_b(n-V) - 1\big) + u' \cdot (n-V)^\gamma \\
= & \{\ \text{arithmetic } \} \\
& u'(n-V)^\gamma \log_b(n-V) \\
= & \{\ \text{definition of } \hat{T}\ \} \\
& \hat{T}(n)
\end{array}
$$

(b) The lower bound for the assumption $f(n) = \Omega(n^\gamma)$. This is in many ways analogous to part (a). By the assumption $f(n) = \Omega(n^\gamma)$, there are constants $u > 0$ and n_1 such that

$$f(n) \geq u \cdot n^\gamma, \text{ for all } n \geq n_1 \tag{22}$$

It follows directly from (10) that $T(n) \geq f(n)$, and hence

$$T(n) > 0, \text{ for } n \geq n_1. \tag{23}$$

We use the same definition (11) of V as in part (a), and we impose the same constraints (13–14) on n_0. In addition, we also require that n_0 is big enough to fulfill the inequality

$$n_0/b - 1 \geq n_1. \tag{24}$$

Set

$$m := \min\{T(\lfloor n_0/b \rfloor), \ldots, T(n_0-1), T(n_0)\} \tag{25}$$

By (23) and (24),

$$m > 0. \tag{26}$$

Set

$$u' := \min\left\{u\left(\frac{n_0}{n_0+V}\right)^\gamma, \frac{m}{(n_0+V)^\gamma \log_b(n_0+V)}\right\}, \tag{27}$$

which is positive due to (26). We define the nonnegative function

$$\hat{T}(n) := u'(n+V)^\gamma \log_b(n+V) \tag{28}$$

for all real numbers $n \geq 0$. Since $V > 1$, by (11), this is a product of two nonnegative increasing functions and is therefore monotone increasing. We claim that $\hat{T}(n)$ is a lower bound on $T(n)$:

$$T(n) \geq \hat{T}(n), \text{ for all integers } n > n_0/b - 1 \tag{29}$$

From this, the desired asymptotic bound $T(n) = \Omega(n^\gamma \log n)$ follows immediately. Note that, by 13, $n_0/b > 1$, and the range of n in which we claim (29) is contained in the domain of $\hat{T}$. As induction basis, we prove (29) for the range $n_0/b - 1 < n \leq n_0$ directly:

$$\begin{array}{ll}
 & \hat{T}(n) \\
\leq & \quad \{\ \hat{T} \text{ is monotone increasing }\} \\
 & \hat{T}(n_0) \\
= & \quad \{\ \text{definition of } \hat{T}\ \} \\
 & u'(n_0+V)^\gamma \log_b(n_0+V) \\
\leq & \quad \{\ \text{second term in the definition (27) of } u'\ \} \\
 & m \\
\leq & \quad \{\ \text{definition (25) of } m, \text{ assumption } n_0/b - 1 < n \leq n_0\ \} \\
 & T(n)
\end{array}$$

We are ready for the induction step to prove (29). Assume $n > n_0$. The induction hypothesis is that $T(i) \geq \hat{T}(i)$ has been proved for all i in the range $n_0/b - 1 < i < n$.

$$\begin{array}{ll}
 & T(n) \\
\geq & \quad \{\ \text{recurrence (10)}\ \} \\
 & aT(\lfloor n/b \rfloor) + f(n) \\
\geq & \quad \{\ n_0/b - 1 < \lfloor n/b \rfloor \text{ and } \lfloor n/b \rfloor < n \text{ by (15), induction hypothesis }\} \\
 & a\hat{T}(\lfloor n/b \rfloor) + f(n)
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\geq \quad & \{\ \hat{T} \text{ is monotone }\} \\
& a\hat{T}(n/b-1)+f(n) \\
\geq \quad & \{\ \text{definition (28) of } \hat{T}\ \} \\
& au'(n/b-1+V)^{\gamma}\log_b(n/b-1+V)+f(n) \\
\geq \quad & \{\ (12)\ \} \\
& au'(n/b+V/b)^{\gamma}\log_b(n/b+V/b)+f(n) \\
= \quad & \{\ \text{rearrangement }\} \\
& (a/b^{\gamma})u'(n+V)^{\gamma}\log_b((n+V)/b)+f(n) \\
= \quad & \{\ a=b^{\gamma} \text{ by the definition of } \gamma, \text{ laws of logarithms }\} \\
& u'(n+V)^{\gamma}\big(\log_b(n+V)-1\big)+f(n) \\
\geq \quad & \{\ \text{condition (22) on } u,\ n>n_0\geq n_1 \text{ by (24) }\} \\
& u'(n+V)^{\gamma}\big(\log_b(n+V)-1\big)+u\cdot n^{\gamma} \\
\geq \quad & \{\ \text{first term in the definition (27) of } u',\ n\geq n_0\ \} \\
& u'(n+V)^{\gamma}\big(\log_b(n+V)-1\big)+u'\cdot(n+V)^{\gamma} \\
= \quad & \{\ \text{arithmetic }\} \\
& u'(n+V)^{\gamma}\log_b(n+V) \\
= \quad & \{\ \text{definition of } \hat{T}\ \} \\
& \hat{T}(n) \qquad \square
\end{aligned}
$$

(c) We finally prove the lower bound for the recursion (10) without any assumption on f. We only require that T is positive. Set

$$m := \min\{T(0), T(1), T(2), \ldots, T(n_0-1), T(n_0)\}. \tag{30}$$

By assumption,

$$m > 0, \tag{31}$$

and hence the constant

$$u' := \frac{m}{(n_0+V)^{\gamma}} \tag{32}$$

is also positive, where V is still the same constant defined above (11). We define the nonnegative and monotone increasing function

$$\hat{T}(n) := u'(n+V)^{\gamma} \tag{33}$$

for all real numbers $n \geq 0$. We claim that $\hat{T}(n)$ is a lower bound on $T(n)$:

$$T(n) \geq \hat{T}(n), \text{ for all } n \geq 0 \tag{34}$$

From this, the desired asymptotic bound $T(n) = \Omega(n^{\gamma})$ follows immediately.

As induction basis, we prove (34) for $0 \leq n \leq n_0$ directly:

$$
\begin{aligned}
& \hat{T}(n) \\
\leq \quad & \{ \hat{T} \text{ is monotone increasing } \} \\
& \hat{T}(n_0) \\
= \quad & \{ \text{ definition of } \hat{T} \} \\
& u'(n_0 + V)^\gamma \\
\leq \quad & \{ \text{ definition (32) of } u' \} \\
& m \\
\leq \quad & \{ \text{ definition (30) of } m, \text{ assumption } n \leq n_0 \} \\
& T(n)
\end{aligned}
$$

For the induction step, we consider $n > n_0$, and the induction hypothesis is that $T(i) \geq \hat{T}(i)$ has been proved for all $i < n$.

$$
\begin{aligned}
& T(n) \\
\geq \quad & \{ \text{ recurrence (10) } \} \\
& aT(\lfloor n/b \rfloor) \\
\geq \quad & \{ \lfloor n/b \rfloor < n, \text{ induction hypothesis } \} \\
& a\hat{T}(\lfloor n/b \rfloor) \\
\geq \quad & \{ \hat{T} \text{ is monotone } \} \\
& a\hat{T}(n/b - 1) \\
\geq \quad & \{ \text{ definition (33) of } \hat{T} \} \\
& au'(n/b - 1 + V)^\gamma \\
\geq \quad & \{ \text{ (12) } \} \\
& au'(n/b + V/b)^\gamma \\
= \quad & \{ \text{ rearrangement } \} \\
& (a/b^\gamma)u'(n + V)^\gamma \\
= \quad & \{ a = b^\gamma \text{ by the definition of } \gamma \} \\
& u'(n + V)^\gamma \\
= \quad & \{ \text{ definition of } \hat{T} \} \\
& \hat{T}(n) \qquad \square
\end{aligned}
$$

The above proof of the upper bound, part (a), deviates in one detail from the proof of Satz 1 in the first part, since the inequality $T'(n) = Dn^\gamma + u'n^\gamma \log_b n \geq M$ for the initial values is not achieved by setting D high enough but by increasing u'.